HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **Winter-Semester 2015 / 2016**

# KLAUSURARBEIT IM BACHELOR-STUDIENGANG MATHEMATIK

| | | | |
|---|---|---|---|
| MODUL: | **Analysis 2** | FACH: | **Analysis B** |
| DATUM: | 5. Februar 2016 | ZEIT: | 8:30 – 10:30 |
| PRÜFER: | Dr. Wolfgang Erben | SEMESTER: | MB2 |

HILFSMITTEL: **ein Blatt DIN A4**, beidseitig eigenhändig handschriftlich beschrieben.
Taschenrechner und jegliche telekommunikationsfähige Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.

ANLAGEN: keine

**UNBEDINGT BEACHTEN:**

- Diese Aufgabenblätter sollten aus **4 Seiten** bestehen und Sie sollten **4 karierte Doppelbögen** erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen, müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen. Die vorliegenden Aufgabenblätter sollen **nicht** abgegeben werden.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die Anwendbarkeit von Regeln muss begründet sein.

**Aufgabe 1.** *(28 Punkte)*

Gegeben seien die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f_\alpha$ und die Funktion $g$ mit

$$f_\alpha(x) \;=\; \frac{1}{1-\alpha x} \qquad \text{und} \qquad g(x) \;=\; \frac{8}{1-8x} \;-\; \frac{7}{1-7x}$$

**Achtung:** Bei $f_\alpha$ kann die Abhängigkeit von $\alpha$ Fallunterscheidungen nötig machen.

a) Geben Sie die (maximalen) Definitionsbereiche von $f_\alpha$ und $g$ an.

b) Bestimmen Sie für $f_\alpha$ die Taylorreihe um $x_0 = 0$ in Summenschreibweise. In welchem Intervall $I_f$ konvergiert diese Reihe? Wo konvergiert sie gegen $f_\alpha$? Welchen Konvergenzradius $R_f$ hat die Reihe?

c) Bestimmen Sie eine Taylorreihe in Summenschreibweise für $g$. Ermitteln Sie den Konvergenzradius $R_g$ und das Konvergenzintervall $I_g$. Geben Sie allgemein für $n \in \mathbb{N}_0$ die Ableitung $g^{(n)}(0)$ an.

d) Entwickeln Sie die Funktion $h : (-\infty, \frac{1}{8}) \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \ln \frac{1-7x}{5-40x}$ in eine Talyorreihe mit Summenschreibweise. Zeigen Sie, dass diese Reihe genau im Intervall $[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ gegen $h$ konvergiert.

**Aufgabe 2.** *(30 Punkte)*

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung $D(n)$ mit dem Störglied $s$:

$$D(n): \quad y^{(n)} \;-\; y'' \;+\; y' \;-\; y \;=\; s(x) \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } s \in C(\mathbb{R})$$

a) Zeigen Sie, dass $e^x$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die zugehörige homogene Gleichung $D_0(n)$ löst. Wie lauten die allgemeinen reellen Lösungen von $D_0(2)$ und von $D_0(3)$?

b) Zeigen Sie, dass das Störglied $s(x) = x$ genau für $n = 0$ Resonanz erzeugt. Geben Sie (für $n = 0$) die zugehörige allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung an.

c) Zeigen Sie, dass 2 für kein $n \in \mathbb{N}_0$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung ist. Geben Sie für das Störglied $s(x) = e^{2x}$ in Abhängigkeit von $n$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $D(n)$ mit $y(0) = 0$ an.

d) Für welchen Wert $n_1$ von $n$ ist $x \cdot e^x$ Lösung von $D_0(n)$? Mit welchem Ansatz kann für $n = n_1$ eine partikuläre Lösung für das Störglied $s(x) = e^x$ ermittelt werden? (Diese Lösung soll nicht berechnet werden!)

**Aufgabe 3.** *(32 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 + xy^2 - 3 \qquad \text{und} \qquad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

a) Geben Sie das totale Differential $df$ an. Zeigen Sie, dass $f$ genau eine stationäre Stelle besitzt.

b) Ermitteln Sie die Tangentialebene an der Stelle $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Geben Sie das nullte Taylorpolynom $p_0$ von $f$ (um $(0,0)$) und das zugehörige Restglied an.

c) Zeigen Sie, dass der Wertebereich $W(f)$ das abgeschlossene Intervall $[-\frac{86}{27}, -2]$ ist. Bestimmen Sie das Bild $f(\partial K)$ des Randes von $K$ und das Urbild $f^{-1}((-\frac{86}{27}, -2))$ des Inneren des Wertebereichs.

d) Geben Sie zwei abgeschlossene, disjunkte Teilmengen $A_1$ und $A_2$ des Randes $\partial K$ an mit $f(A_1) = f(A_2) = f(\partial K)$.

**Aufgabe 4.** *(30 Punkte)*

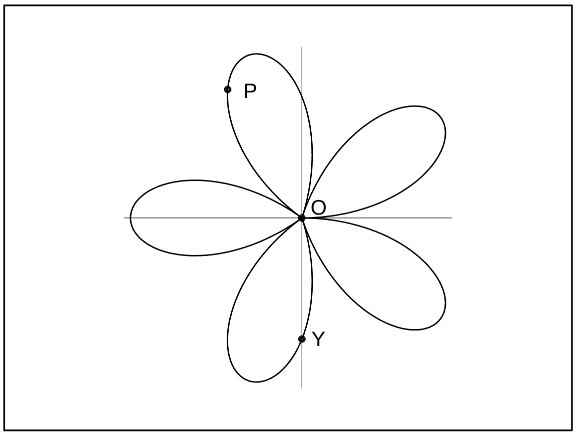
Die nachstehend skizzierte Kurve $K$ kann in Polarkoordinaten beschrieben werden durch

$$K: \quad r = r(\varphi) = \left| \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \right| \quad ; \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

a) Geben Sie für den markierten Punkt $P(-\frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4})$ die Polarkoordinaten $(r_P, \varphi_P)$ an und zeigen Sie, dass $P$ auf der Kurve liegt.

b) Bestimmen Sie im Schnittpunkt $Y$ mit der negativen $y$-Achse die Tangente in der Form $y = mx + b$.

c) Zeigen Sie, dass die Kurve $K$ invariant ist bezüglich Drehung um Vielfache von 72° um den Ursprung $O(0, 0)$.




d) Berechnen Sie den Inhalt $F$ der gesamten von $K$ eingeschlossenen Fläche $A$ sowie den Inhalt des links der y-Achse liegenden Teiles von $A$. Zeigen Sie dazu zunächst, dass $\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{10}\sin 5\varphi$ eine Stammfunktion von $\sin^2 \frac{5}{2}\varphi$ ist.

e) Zeigen Sie, dass $K$ so um $O$ gedreht werden kann, dass die dann links der y-Achse liegende Fläche genau den Inhalt 0.8 besitzt. Nutzen Sie die Symmetrie aus Teilaufgabe c), um abzuschätzen, wie weit dazu maximal gedreht werden muss. Eventuell zusätzlich verwendete Symmetrien brauchen nicht nachgewiesen zu werden.