HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **Sommer-Semester 2017**

KLAUSURARBEIT IM BACHELOR-STUDIENGANG MATHEMATIK

MODUL:	**Analysis 1**	FACH:	**Analysis A**
DATUM:	12. Juli 2017	ZEIT:	8:30 – 10:30
PRÜFER:	Wolfgang Erben	SEMESTER:	MB1

HILFSMITTEL: **ein Blatt DIN A4**, beidseitig eigenhändig handschriftlich beschrieben.
Taschenrechner und jegliche telekommunikationsfähige Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Diese Aufgabenblätter sollten aus **3 Seiten** bestehen und Sie sollten **4 karierte Doppelbögen** erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen, müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen. Die vorliegenden Aufgabenblätter sollen **nicht** abgegeben werden.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die Verwendung von Regeln und Sätzen muss angegeben und ihre Anwendbarkeit begründet sein.

Aufgabe 1. (24 Punkte)

a) Berechnen Sie die komplexe Zahl $z_1 = \dfrac{1-2i}{3+i}$. Geben Sie $|z_1|$ und $|(\frac{1}{z_1})^8|$ an.

b) Bestimmen Sie das Argument von $z_2 = 2(1+\sqrt{2})(1-i)$. Ermitteln Sie das Quadrat von $z_3 = i - 1 - \sqrt{2}$ und zeigen Sie, dass $z_3^2 = z_2$. Berechnen Sie damit $\arg(z_3)$.

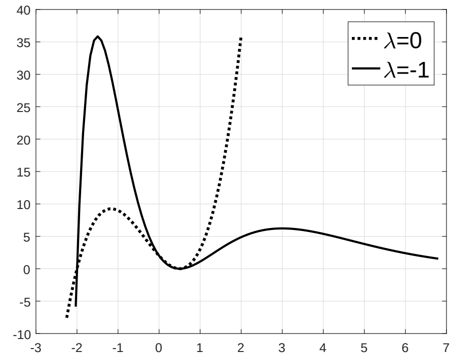
c) Lösen Sie die beiden Gleichungen $16 + z^4 = 0$ und $z^4 + 1024 = 0$. Geben Sie die Lösungen der ersten Gleichung in Exponentialform an, die Lösungen der zweiten Gleichung in kartesischer Darstellung.

Aufgabe 2. *(36 Punkte)*

Vorgelegt ist die von $\lambda \leq 0$ abhängende Funktion $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_\lambda(x) = e^{\lambda x} \cdot (2 - 7x + 4x^2 + 4x^3)$$

Nebenstehend sind die Schaubilder für die beiden Werte $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$ veranschaulicht.



a) Berechnen Sie $f_\lambda(-2)$, $f_\lambda(-\frac{3}{2})$und $f_\lambda(3)$. Verwenden Sie zur Auswertung des Polynoms jeweils das Horner-Schema. Bestätigen Sie, dass $f_\lambda(-2) = 0$ für alle λ.

b) Ermitteln Sie $f_\lambda(\{-2, 0\})$ und $f_\lambda^{-1}(\{0\})$. Begründen Sie mit dem Mittelwertsatz, dass jedes f_λ im Intervall $(-2, \frac{1}{2})$ eine stationäre Stelle besitzt.

c) Berechnen Sie (in Abhängigkeit von λ) die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to -2-} f_\lambda(x)$ und $\lim\limits_{x \to -2+} \frac{1}{f_\lambda(x)}$, sowie $\lim\limits_{x \to -\infty} f_\lambda(x)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x)$.

d) Bestimmen Sie die Wertebereiche $W(f_0)$ und $W(f_{-1})$. Überprüfen Sie die beiden Funktionen f_0 und f_{-1} auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 3. *(30 Punkte)*

a) Lösen Sie in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ die Gleichung $x = \sqrt{1 + b^2x^2}$. Geben Sie insbesondere an, für welche b die Gleichung lösbar ist und wann die Lösung eindeutig ist.

b) Zeigen Sie, dass die rekursiv über $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + 87a_n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $\langle a_n \rangle$ divergiert.

c) Begründen Sie präzise, dass für die über $f(x) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}$ gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $f([0, \frac{2}{3}\sqrt{3}] = [1, \frac{2}{3}\sqrt{3}]$. Bestimmen Sie die Menge $P = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > x\}$.

d) Zeigen Sie, dass die rekursiv über $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}a_n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert und bestimmen Sie Ihren Grenzwert. Beweisen Sie dazu zunächst mittels vollständiger Induktion, dass die ganze Folge $\langle a_n \rangle$ im Intervall $[0, \frac{2}{3}\sqrt{3}]$ liegt

Aufgabe 4. *(30 Punkte)*

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \arctan x$. Ermitteln Sie eine Stammfunktion F von f und geben Sie $F(1)$ an.

b) Bestimmen Sie $\int \arctan(ax)\, dx$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

c) Zeigen Sie, dass für alle $a, b > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \left(x \arctan(ax) - x \arctan(bx)\right) \;=\; \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

d) Weisen Sie nach, dass

$$\int_0^\infty \left(\arctan(2x) - \arctan(4x) + \frac{1}{4x+4}\right) dx \;=\; -\frac{1}{4}$$