HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **Sommer-Semester 2016**

KLAUSURARBEIT IM BACHELOR-STUDIENGANG MATHEMATIK

MODUL:	**Analysis 1**	FACH:	**Analysis A**
DATUM:	6. Juli 2016	ZEIT:	8:30 – 10:30
PRÜFER:	Wolfgang Erben	SEMESTER:	MB1

HILFSMITTEL: **ein Blatt DIN A4**, beidseitig eigenhändig handschriftlich beschrieben.
Taschenrechner und jegliche telekommunikationsfähige Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Diese Aufgabenblätter sollten aus **3 Seiten** bestehen und Sie sollten **4 karierte Doppelbögen** erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen, müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen. Die vorliegenden Aufgabenblätter sollen **nicht** abgegeben werden.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die Anwendbarkeit von Regeln muss begründet sein.

Aufgabe 1. (25 Punkte)

a) Lösen Sie die Gleichung $z^2 = \frac{3}{2} \cdot (i\sqrt{3} - 1)$. Geben Sie die Lösungen z_{a1}, z_{a2} sowie deren Kehrwerte $\frac{1}{z_{a1}}, \frac{1}{z_{a2}}$ in Exponentialform an.

b) Geben Sie für das Polynom $p(z) = \frac{1}{3}z^4 + z^2 + 3$ die vier komplexen Nullstellen z_{b1} bis z_{b4} in kartesischer Darstellung an.

c) Zerlegen Sie $p(z)$ in (komplexe) Linearfaktoren. Bestimmen Sie das Produkt $z_{b1} \cdot z_{b2} \cdot z_{b3} \cdot z_{b4}$ der vier Nullstellen.

Hinweis: Die Multiplikation der kartesischen Darstellungen von z_{b1} bis z_{b4} ist viel zu aufwändig.

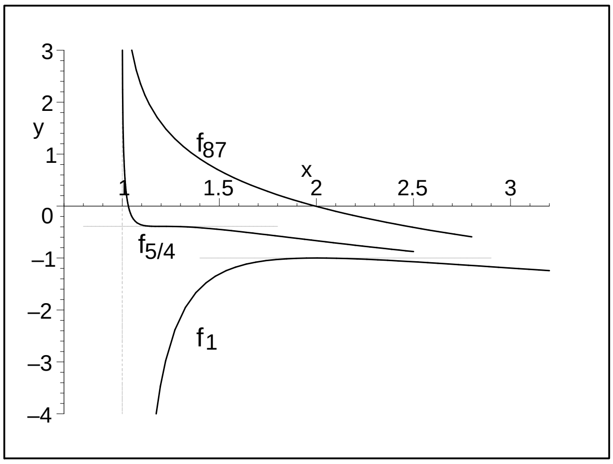
d) Geben Sie eine Gleichung $z^n = a$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$) an, welche ebenfalls die Lösungen z_{b1} bis z_{b4} besitzt. Welche zusätzlichen Lösungen besitzt diese Gleichung?

Aufgabe 2. *(35 Punkte)*

Gegeben sei die vom Parameter $\alpha > 0$ abhängende Funktion f_α mit

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{1 - \alpha x} - \ln(x - 1)$$

Nebenstehend sind (von unten nach oben) die Schaubilder für die drei Werte $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{5}{4}$ und $\alpha = 87$ veranschaulicht, die in den folgenden Aufgabenteilen eine besondere Rolle spielen.



a) Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von α) den (maximalen) Definitionsbereich $D(f_\alpha)$. Zeigen Sie, dass $D(f_\alpha)$ genau für $\alpha \geq 1$ zusammenhängend ist.

b) Begründen Sie, dass $\lim\limits_{x\to\infty} f_\alpha(x) = -\infty$ für alle $\alpha > 0$ und $\lim\limits_{x\to 1+} f_\alpha(x) = +\infty$ für $\alpha \neq 1$. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 1+} f_1(x)$.

c) Zeigen Sie, dass höchstens an den Stellen $x_{1,2} = \frac{1}{2\alpha} \cdot \left[3 \pm \sqrt{5 - 4\alpha}\right]$ stationäre Stellen von f_α vorliegen können. Beweisen Sie damit, dass f_{87} streng monoton fallend ist. Für welche $\alpha \geq \frac{5}{4}$ besitzt f_α eine Umkehrfunktion?

d) Bestimmen Sie den Wertebereich $W(f_1)$ sowie die Urbilder $f_1^{-1}((-\infty, -1])$, $f_1^{-1}((-\infty, -1))$, $f_1^{-1}((-1, \infty))$ und $f_1^{-1}([-1, \infty))$. Achten Sie dabei besonders auf präzise Begründungen.

Aufgabe 3. *(30 Punkte)*
a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x+1}{9x^2+1} - \frac{\frac{1}{9}}{x+1} \right) dx$$

konvergiert und berechnen Sie seinen Wert.

b) Bestimmen Sie mittels partieller Integration zu $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_a(t) = t \cdot e^{at}$$

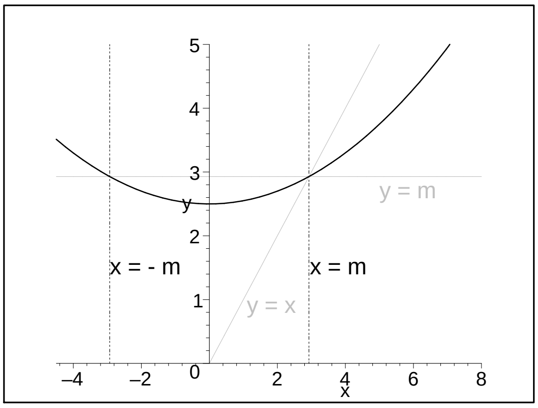
in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F_a(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{a \to 0} F_a(t) = F_0(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

c) Ermitteln Sie für $a \in \mathbb{R}$ das unbestimmte Integral $\int x^a \ln x \, dx$, indem Sie zunächst die Substitution $x = e^u$ durchführen. Zeigen Sie, dass

$$\int_1^\infty x^a \ln x \, dx = \begin{cases} \frac{1}{(a+1)^2} & \text{für } a < -1 \\ \infty & \text{für } a \geq -1 \end{cases}$$

Aufgabe 4. *(30 Punkte)*
Die Folge $\langle a_n \rangle$ sei mit Hilfe der nachstehend skizzierten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 = -2\sqrt{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = f(a_n) \;\; \text{für } n \in \mathbb{N}_0, \text{ wobei} \quad f(x) = \frac{5}{2} + \frac{x^2}{20}$$



a) Bestimmen Sie die Menge

$$I := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < x\}$$

und geben Sie das Infimum m von I an. Bestätigen Sie, dass $m = 10 - 5\sqrt{2}$.

b) Zeigen Sie, dass $f((-m, m)) = [\frac{5}{2}, m)$.

c) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die ganze Folge $\langle a_n \rangle$ im Intervall $(-m, m)$ liegt.

d) Zeigen Sie dass die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert und geben Sie ihren Grenzwert a an.

e) Weisen Sie nach, dass $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{2}$.