Aufgabe 1.

a) $f'(x) = 9 \cdot (1-2x^2)^8 \cdot (-4x) = -36x(1-2x^2)^8$

b) $f'(x) = 2x \cdot (1+3x)^4 + (1+x^2) \cdot 4(1+3x)^3 \cdot 3 =$
$= (1+3x)^3 \cdot \left[2x(1+3x) + 12(1+x^2)\right] = 2 \cdot (1+3x)^3(6+x+9x^2)$

c) $f(x) = 8 \cdot (1-x) \cdot \sqrt[4]{(1-x)^3} = 8 \cdot (1-x) \cdot (1-x)^{\frac{3}{4}} = 8 \cdot (1-x)^{\frac{7}{4}}$
$f'(x) = 8 \cdot \frac{7}{4}(1-x)^{\frac{3}{4}} \cdot (-1) = -14 \cdot (1-x)^{\frac{3}{4}}$

d) $f(x) = \frac{1-x^2}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$
$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot (3x^2+1)$

e) $f'(x) = \frac{-2 \cdot (1+x) - 1 \cdot (1-2x)}{(1+x)^2} = \frac{-3}{(1+x)^2}$

f) $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (1-2x)^4 - 4 \cdot (1-2x)^3 \cdot (-2) \cdot x^3}{(1-2x)^8} =$
$= \frac{x^2}{(1-2x)^5} \cdot [3 \cdot (1-2x) - 4 \cdot (-2) \cdot x] = \frac{x^2 \cdot (3+2x)}{(1-2x)^5}$

g) $f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\sqrt{x}}}$

Aufgabe 2.

a) $f'(x) = \frac{-6x}{\cos^2(1-3x^2)}$

b) $f'(x) = -2\pi x \cdot e^{-\pi x^2}$

c) $f(x) = (\pi^{3x})^5 = \pi^{15x} = e^{15x \cdot \ln \pi}$
$f'(x) = e^{15x \cdot \ln \pi} \cdot 15 \ln \pi = \pi^{15x} \cdot 15 \ln \pi$

d) $f(x) = \pi^{(3x)^5} = e^{(3x)^5 \cdot \ln \pi}$
$f'(x) = e^{(3x)^5 \cdot \ln \pi} \cdot 5 \cdot (3x)^4 \cdot 3 \cdot \ln \pi = \pi^{(3x)^5} \cdot (15 \ln \pi) \cdot (3x)^4$

e) $f'(x) = -\sin(x \cdot \ln x) \cdot \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = -\sin(x \cdot \ln x) \cdot (1 + \ln x)$

Aufgabe 3.
a) Direktes Ableiten ergibt:

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot e^{-\sin 2x}} \cdot \left[1 \cdot e^{-\sin 2x} + x \cdot e^{-\sin 2x} \cdot (-\cos 2x) \cdot 2\right] =$$

$$\frac{1}{x}(1 - 2xcos2x) = \frac{1}{x} - 2\cos 2x$$

Besser ist ein vorheriges Umformen:

$$f(x) = \ln\left(x \cdot e^{-\sin 2x}\right) = \ln x + \ln e^{-\sin 2x} = \ln x - \sin 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2\cos 2x$$

b) $f'(x) = 2x \cdot \arctan\sqrt{x} + x^2 \cdot \dfrac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} =$

$$2x \arctan\sqrt{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1 + x}$$

c) Hier empfiehlt sich wieder eine vorherige Umformung:

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}\right) = \ln\left(\sin^2 3x\right) - \ln\left(\sqrt[3]{x^3 + 1}\right) = 2\ln\sin 3x - \frac{1}{3}\ln(x^3 + 1)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{3\cos 3x}{\sin 3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{x^3 + 1} = 6\cot 3x - \frac{x^2}{x^3 + 1}$$

Aufgabe 4. Damit f differenzierbar ist, muss die Funktion zunächst stetig sein. Es ist

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = 2a + b = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 4a + 2b + 1$$

Die Funktion ist also stets linksseitig stetig. Rechtsseitig stetig ist sie für

$$4a + 2b + 1 = 2a + b \qquad \Leftrightarrow \qquad 2a + b + 1 = 0$$

Für die Ableitung gilt

$$f'_-(x) = a \quad \text{für } x \leq 2$$

$$f'_+(x) = 2ax + b \quad \text{für } x \geq 2$$

Damit die Funktion bei $x = 2$ differenzierbar ist, muss $f'_-(2) = f'_+(2)$ gelten, also

$$a = 4a + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = -3a$$

Eingesetzt in die Stetigkeitsbedingung

$$2a - 3a + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = 1$$

$$b = -3a = -3$$

Die Funktion ist also (genau) für $a = 1$ und $b = -3$ differenzierbar.

Aufgabe 5. Es ist

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{-1+x+2}{1-x} = \frac{-1+x}{1-x} + \frac{2}{1-x} = -1 + 2\cdot(1-x)^{-1}$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = 2\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-2}\cdot(-1) = \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2\cdot 1!}{(1-x)^2}$$

Die Behauptung ist für $n = 1$ also richtig. Für ein n gelte

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}} = 2n!\cdot(1-x)^{-(n+1)}$$

Dann ist für $m = n+1$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(m)} = \left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)}\right)' = \left(2n!\cdot(1-x)^{-(n+1)}\right)' =$$

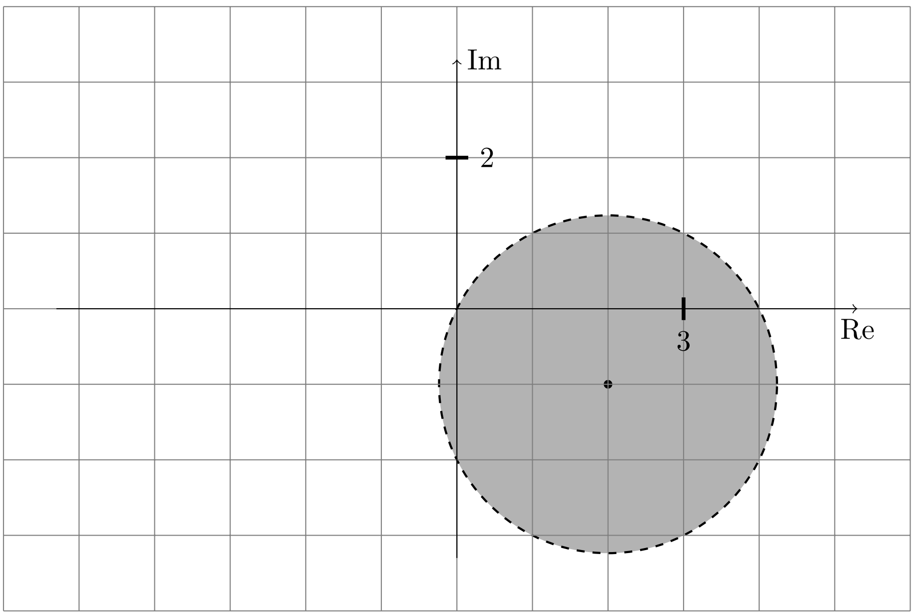
$$= 2n!\cdot[-(n+1)]\cdot(1-x)^{-(n+2)}\cdot(-1) = 2(n+1)!\cdot(1-x)^{-(n+2)} = \frac{2\cdot m!}{(1-x)^{m+1}}$$

Die Behauptung ist also auch für $m = n+1$ richtig.

Aufgabe 6.
a) Der Rand ∂M ist ein Kreis um $2-i$ mit Radius $\sqrt{5}$. M ist das Innere dieses Kreises ohne den Rand. M ist offen, weil kein Randpunkt zur Menge gehört.

$$M = \{\ z\in\mathbb{C}\ \mid\ |z-2+i| < \sqrt{5}\ \}$$

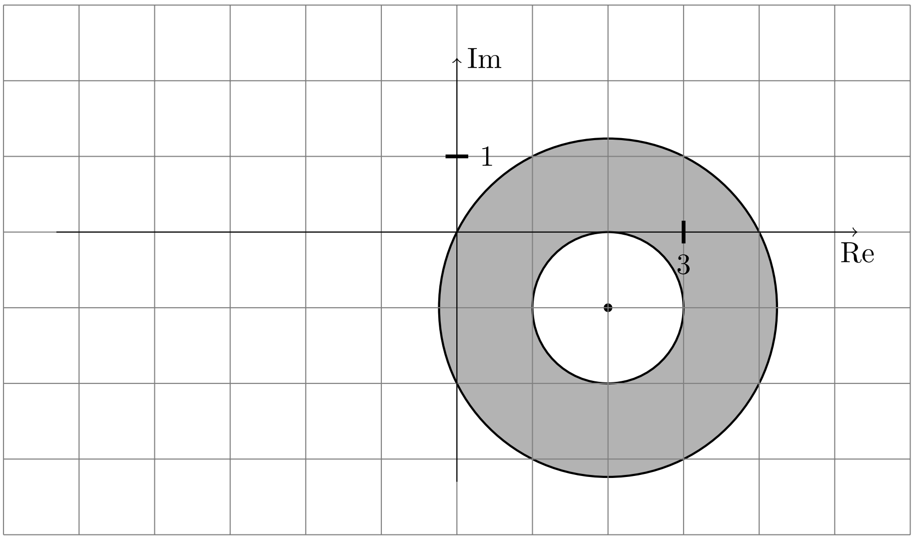
$$\partial M = \{\ z\in\mathbb{C}\ \mid\ |z-2+i| = \sqrt{5}\ \}$$



b) M ist ein Kreisring um $2-i$ inklusive Rand. Der innere Kreis hat den Radius 1, der äußere den Radius $\sqrt{5}$. Der Rand ∂M besteht aus diesen beiden Kreisen. M ist abgeschlossen, weil alle Randpunkte zur Menge gehören.

$$M = \{\ z \in \mathbb{C}\ \mid\ 1 \leq |z-2+i| \leq \sqrt{5}\ \}$$

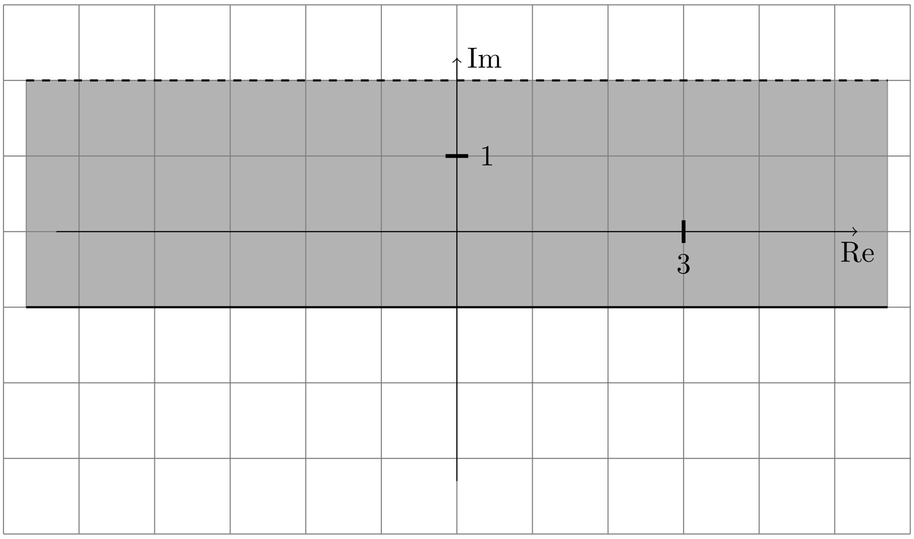
$$\begin{aligned}\partial M &= \{\ z \in \mathbb{C}\ \mid\ |z-2+i| = 1 \ \text{ oder }\ |z-2+i| = \sqrt{5}\ \} = \\ &= \{\ z \in \mathbb{C}\ \mid\ |z-2+i| \in \{1, \sqrt{5}\}\ \}\end{aligned}$$



c) Der Rand ∂M besteht aus zwei horizontalen Geraden, eine bei Imaginärteil -1, die andere bei Imaginärteil 2. M ist der dazwischen liegende Streifen. Der untere Rand gehört zur Menge M dazu, der obere nicht. M ist deshalb weder offen, noch abgeschlossen. (Den Begriff halboffen gibt es nur bei Intervallen.)

$$M = \{\ z \in \mathbb{C}\ \mid\ -1 \leq \mathrm{Im}(z) < 2\ \}$$

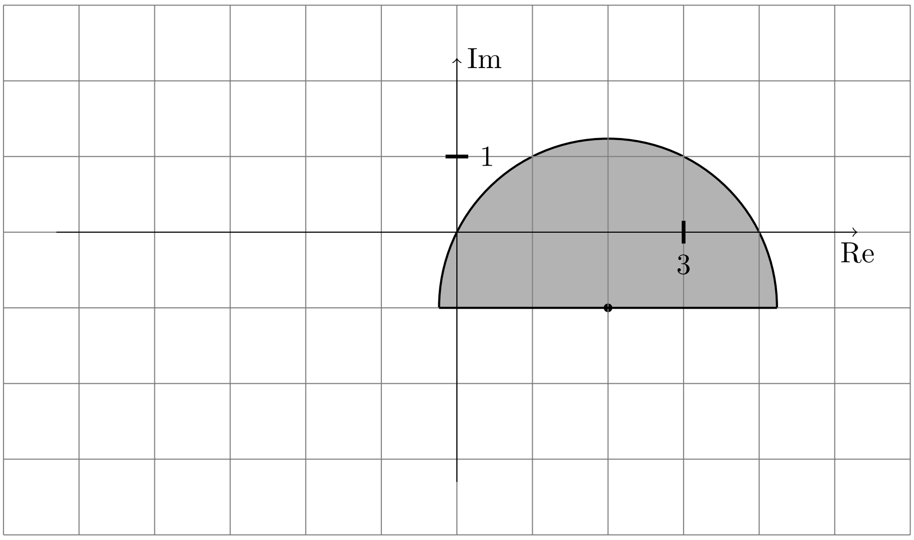
$$\begin{aligned}\partial M &= \{\ z \in \mathbb{C}\ \mid\ \mathrm{Im}(z) = -1 \ \text{ oder }\ \mathrm{Im}(z) = 2\ \} = \\ &= \{\ z \in \mathbb{C}\ \mid\ \mathrm{Im}(z) \in \{-1, 2\}\ \}\end{aligned}$$



d) M ist die obere Hälfte einese Kreises mit Radius $\sqrt{5}$ um $2-i$ inklusive Rand. Der Rand ∂M besteht aus einer Strecke und einem Halbreis. M ist abgeschlossen, weil alle Randpunkte innerhalb der Menge M liegen.

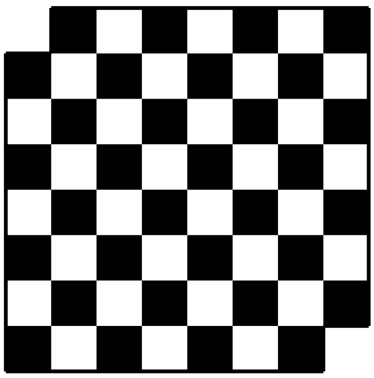
$$M = \{\ z \in \mathbb{C} \ \mid \ \mathrm{Im}(z) \geq -1 \ \text{ und } \ |z-2+i| \leq \sqrt{5}\ \}$$

$$\partial M = \{\ z \in \mathbb{C} \ \mid \ (\mathrm{Im}(z) = -1 \ \text{ und } \ |z-2+i| \leq \sqrt{5}) \quad \text{oder} \quad (|z-2+i| = \sqrt{5} \ \text{ und } \ \mathrm{Im}(z) \geq -1)\ \}$$



Aufgabe 7. Eine Pflasterung des um zwei gegenüberliegende Eckfelder beraubten Quadrates ist nicht möglich.

Um dies zu verstehen, stellt man sich das Quadrat am besten als Schachbrett vor. Die beiden weggelassenen Eckfelder besitzen die gleiche Farbe (hier weiß). Der zu überdeckende Bereich besteht also aus 32 schwarzen und 30 weißen Feldern. Ein Dominostein bedeckt aber stets ein weißes und ein schwarzes Feld. Es können also nur Bereiche überdeckt werden, die aus gleich vielen weißen und schwarzen Feldern bestehen.



Hinweis: "Die Aufgabe wurde zum ersten Mal von S.W.Golomb veröffentlicht und dann von *Martin Gardner* in seiner Kolumne in der Zeitschrift *Scientific American* popularisiert." ... „Heute ist die **Färbungsmethode** zum Beweis kombinatorischer Eigenschaften eine ausgebaute Theorie und gehört zum Handwerkszeug jeden Mathematikers. Die jugendlichen Teilnehmer an den Mathematikolympiaden werden ganz besonders auf diese Techniken trainiert." Das Zitat stammt aus dem sehr empfehlenswerten Buch *„In Mathe war ich immer schlecht ..."* von *Albrecht Beutelspacher.*