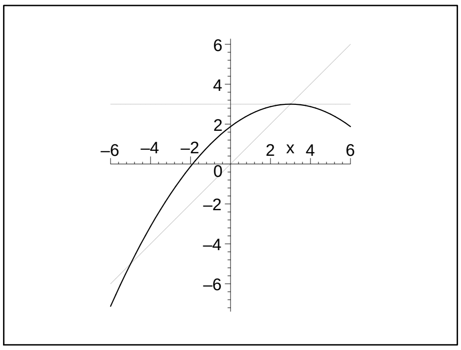
Thema: Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1. SS15 *(28 Punkte)*

Die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Folge $\langle x_n \rangle$ sei mit Hilfe der nachstehend skizzierten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch $x_0 = s$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$f(x) = \frac{1}{8}(15 + 6x - x^2)$$



a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $s \in [-5, 3]$ die ganze Folge $\langle x_n \rangle$ im Intervall $[-5, 3]$ liegt. Begründen Sie dazu zunächst, dass $f([-5, 3]) = [-5, 3]$.

b) Zerlegen Sie $g(x) = f(x) - x$ in Linearfaktoren. Beweisen Sie hiermit, dass die Folge für $-5 \leq s \leq 3$ monoton wachsend und für $s < -5$ streng monoton fallend ist.

Hinweis: Entsprechend zu a) liegt für $s \in (-\infty, -5)$ die ganze Folge $\langle x_n \rangle$ im Intervall $(-\infty, -5)$. Das kann ohne Nachweis verwendet werden.

c) Berechnen Sie $f(11)$ mit Hilfe des Horner-Schemas. Für zwei Werte s_1 und s_2 von s ist die Folge konstant, für einen dritten Wert s_3 fast - also ab einem bestimmten Glied - konstant. Geben Sie s_1, s_2 und s_3 an.

d) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} -\infty & \text{für} \quad s < -5 \\ -5 & \text{für} \quad s = -5 \\ 3 & \text{für} \quad -5 < s \leq 3 \end{cases}$$

Geben Sie (ohne Begründung) den Grenzwert auch für $s > 3$ an.

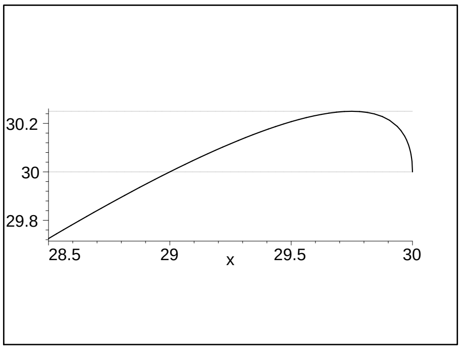
Aufgabe 2. SS15 *(30 Punkte)*

Gegeben seien die nachstehend skizzierte Funktion f aus $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x + \sqrt{30 - x}$$

und die daraus gebildete Funktion g mit

$$g(x) = \ln(-x - \sqrt{30 - x}) = \ln(-f(x))$$



a) Bestimmen Sie die (maximalen) Definitionsbereiche der beiden Funktionen. Geben Sie die Urbilder $f^{-1}((-\infty, 0))$ und $g^{-1}(\mathbb{R})$ an.

b) Überprüfen Sie die beiden Funktionen auf stationäre Stellen. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein Extremum handelt.

c) Bestimmen Sie die Wertebereiche der beiden Funktionen. Geben Sie für f Supremum und Infimum an.

d) Zeigen Sie, dass g injektiv ist, nicht aber f. Geben Sie $f^{-1}(\{30\})$ an, wofür ausnahmsweise keine Begründung verlangt ist. Ist eine der beiden Funktionen bijektiv?