Aufgabe 1.

a) Im Innern des Intervalls $[-5, 3]$, also in $(-5, 3)$ ist

$$f'(x) = \frac{1}{8}(6 - 2x) = \frac{1}{4}(3 - x) > 0$$

Die Extrema liegen folglich am Rand, das absolute Minimum bei -5, das absolute Maximum bei 3. Da f stetig ist, muss das Bild der zusammenhängenden Menge $[-5, 3]$ wieder zusammenhängend sein, also ein Intervall. Damit ist $f([-5, 3]) = [f(-5), f(3)] = [-5, 3]$.

Für $s \in [-5, 3]$ ist zu zeigen, dass $x_n \in [-5, 3]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Proof.
Induktionsanfang: Wegen $x_0 = s$ ist $x_0 \in [-5, 3]$.
Induktionsschritt: Es gelte $x_n \in [-5, 3]$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $x_{n+1} = f(x_n)$ und $f([-5, 3]) = [-5, 3]$ ist $x_{n+1} \in [-5, 3]$. □

b) Es ist

$$f(x) - x = \frac{1}{8}(15 + 6x - x^2) - x = \frac{1}{8}(15 - 2x - x^2) = -\frac{1}{8}(x + 5)(x - 3)$$

denn $x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{4 + 60}) = -1 \pm 4$.

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist deshalb

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n = -\frac{1}{8}(x_n + 5)(x_n - 3)$$

Für $s < -5$ ist nach dem Hinweis auch $x_n < -5$. Damit sind beide Linearfaktoren < 0, also $x_{n+1} - x_n < 0$. Das heißt, die Folge ist streng monoton fallend. Für $-5 \leq s \leq 3$ ist nach a) auch $-5 \leq x_n \leq 3$. Nur der zweite Linearfaktor ist ≤ 0, also $x_{n+1} - x_n \geq 0$. Das heißt, die Folge ist (nicht unbedingt streng) monoton wachsend.

c) Berechnung des Funktionswertes $f(11)$ mit Horner:

$$\begin{array}{c|ccc} & -\frac{1}{8} & \frac{6}{8} & \frac{15}{8} \\ 11 & & -\frac{11}{8} & -\frac{55}{8} \\ \hline & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{40}{8} \end{array}$$

Damit ist $f(-5) = -\frac{40}{8} = -5$.

Konstant ist die Folge genau dann, wenn $x_0 = x_1$, also $s = x_0 = x_1 = f(x_0) = f(s)$. Aus der Linearfaktorzerlegung von $f(x) - x$ ergibt sich, dass dies genau für $s_1 = -5$ und $s_2 = 3$ erfüllt ist. Für $s_3 = 11$ ist $x_1 = f(x_0) = f(11) = -5$, die Folge also ab dem Glied x_1 konstant.

d) Falls ein Grenzwert a existiert, muss er ein Fixpunkt der Rekursionsvorschrift sein, das heißt $f(a) = a$. a ist demnach eine Nullstelle von g, also $a = -5$ oder $a = 3$.

Für $s = -5$ und für $s = 3$ ist die Folge konstant, also $\lim\limits_{n \to -\infty} x_n = s$.

Für $s \in (-5, 3)$ ist die Folge nach b) monoton wachsend und nach a) auch beschränkt. Der Hauptsatz über monotone Folgen ergibt die Konvergenz der Folge. Als Grenzwerte kommen aber nur die Fixpunkte -5 und 3 in Frage. Wegen $x_0 > -5$ kann die (wachsende!) Folge nur gegen 3 konvergieren.

Für $s < -5$ ist die Folge nach b) streng monoton fallend.Da es keinen potentiellen Grenzwert kleiner als -5 gibt, muss die Folge divergieren. Ihr Grenzwert ist $-\infty$.

Für $s = 11$ ist nach c) $\lim\limits_{n\to-\infty} x_n = -5$. Generell ergibt sich bei $s = s_0 > 3$ das gleiche x_1 wie bei $s = 3 - s_0$. Damit erhält man für $s \in (3, 11)$ den Grenzwert 3 und für $s > 11$ den Grenzwert $-\infty$.

Aufgabe 2.

a) Offenbar ist $D(f) = (-\infty, 30]$.

In $D(g)$ muss $x \leq 30$ sein, aber zusätzlich $-f(x) = -x - \sqrt{30 - x} > 0$. Zunächst untersuchen wir, wo Gleichheit gilt:

$$f(x) = x + \sqrt{30 - x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x = \sqrt{30 - x} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 0 \text{ und } x^2 = 30 - x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq 0 \text{ und } x^2 + x - 30 = 0$$

Die quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 120}) = \frac{1}{2}(-1 \pm 11)$. Wegen $x \leq 0$ kommt aber nur $\frac{1}{2}(-1 - 11) = -6$ in Frage.

Nur bei $x = -6$ kann $f(x)$ also das Vorzeichen wechseln. Wegen $f(30) = 30 > 0$ ist $f(x)$ im ganzen Intervall $(-6, 30]$ echt positiv. Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ist $f(x)$ im ganzen Intervall $(-\infty, -6)$ echt negativ. Der Definitionsbereich von g ist demnach $D(g) = (-\infty, -6)$.

Es ist $f^{-1}((-\infty, 0)) = D(g) = (-\infty, -6)$ und $g^{-1}(\mathbb{R}) = D(g) = (-\infty, -6)$.

b) Berechnung der stationären Stellen von f:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}(30 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{30 - x}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{30 - x} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 30 - x = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = 30 - \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{119}{4}$$

Hinreichendes Kriterium für diese Stelle:

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(30 - x)^{-\frac{3}{2}} < 0$$

Bei $x_1 = \frac{119}{4}$ befindet sich demnach ein relatives Extremum und zwar ein relatives Maximum.

Für die stationären Stellen von g muss wegen

$$g'(x) = \frac{1}{-f(x)} \cdot (-f'(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ebenfalls $f'(x) = 0$ gelten. Da $x_1 = \frac{119}{4} \notin D(g)$ besitzt g keine stationären Stellen.

c) Das absolute Maximum von f findet man durch Vergleich des Funktionswertes an der stationären Stelle mit denen an den Rändern:

$$f(x_1) = \frac{119}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{121}{4} \ , \quad f(30) = 30 < f(x_1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{30 - x}) = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

Bei der Berechnung des Grenzwertes wurde verwendet, dass x^1 qualitativ schneller wächst als $x^{\frac{1}{2}}$. Für den Wertebereich von f ergibt sich damit $W(f) = (-\infty, \frac{121}{4}]$. Es ist $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{121}{4}$ und $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\infty$.

g hat keine stationären Stellen. Nach dem Zwischenwertsatz ist mit $D(g)$ auch $W(g)$ zusammenhängend. Wegen

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(-f(x)) = \ln(-\lim_{x \to -\infty} f(x)) = \ln \infty = \infty$$

$$\lim_{x \to -6} g(x) = \lim_{x \to -6} \ln(-f(x)) = \ln(-\lim_{x \to -6} f(x)) = \ln 0 = -\infty$$

ist $W(g) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

d) g hat keine stationären Stellen. Auf dem (zusammenhängenden) Definitionsbereich $D(g) = (-\infty, -6)$ ist g demnach streng monoton und damit injektiv. Wegen $W(g) = \mathbb{R}$ ist g auch surjektiv, insgesamt also bijektiv.

Wegen $f(29) = 29 + 1 = 30 = f(30)$ ist die Funktion nicht injektiv, also erst recht nicht bijektiv. Es ist $f^{-1}(\{30\}) = \{29, 30\}$.