Aufgabe 1.
a) Die partiellen Ableitungen von f_a müssen 0 sein

$$\frac{\partial f_a}{\partial x}(x,y) = 2x - 2(y-x) = 2(2x-y) \stackrel{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; y = 2x$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial y}(x,y) = 2(y-x) - 4(a-y) = 2(3y-x-2a) \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; 5x - 2a = 0$$

Die eindeutige stationäre Stelle befindet sich also bei $(x_S, y_S) = \frac{2}{5}a(1,2)$. Für die Determinante der Hesse-Matrix ergibt sich

$$|H_f| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20 > 0$$

Es handelt sich demnach um ein relatives Extremum, und zwar wegen $\frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2} = 4 > 0$ um ein Minimum. Der zugehörige Funktionswert ist $f_a(\frac{2a}{5}, \frac{4a}{5}) = \frac{4a^2}{25} + \frac{4a^2}{25} + \frac{2a^2}{25} = \frac{2a^2}{5}$.

b) $g(x) := f_a(x,a) = x^2 + (a-x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, besitzt also ein absolutes Minimum. Aus $g'(x) = 4x - 2a \stackrel{!}{=} 0$ ergibt sich, dass sich das absolute Minimum bei $x = \frac{a}{2}$ befindet. Wegen $g(a) = \frac{a^2}{2}$ ist das absolute Minimum von f_a unter der Nebenbedingung $y = a$ der Punkt $(\frac{a}{2}, a, \frac{a^2}{2})$.

c) Sinnvollerweise wird $0 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le a$ gewählt. Die Entfernung einer Stelle $0 \le x \le a$ vom nächsten Zebrastreifen ist dann:

$$\delta(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le \frac{x_1}{2} \\ x_1 - x & \text{für } \frac{x_1}{2} \le x \le x_1 \\ x - x_1 & \text{für } x_1 \le x \le \frac{x_1+x_2}{2} \\ x_2 - x & \text{für } \frac{x_1+x_2}{2} \le x \le x_2 \\ x - x_2 & \text{für } x_2 \le x \end{cases}$$

Für die mittlere Entfernung $d(x_1, x_2)$ zu einem der drei Zebrastreifen gilt:

$$a \cdot d(x_1,x_2) = \int_0^a \delta(x)\,dx = \int_0^{\frac{x_1}{2}} x\,dx + \int_{\frac{x_1}{2}}^{x_1} (x_1 - x)\,dx + \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} (x - x_1)\,dx +$$

$$+ \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} (x_2 - x)\,dx + \int_{x_2}^{a} (x - x_2)\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^{\frac{x_1}{2}} - \frac{1}{2}\left[(x_1-x)^2\right]_{\frac{x_1}{2}}^{x_1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[(x-x_1)^2\right]_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} - \frac{1}{2}\left[(x_2-x)^2\right]_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} + \frac{1}{2}\left[(x-x_2)^2\right]_{x_2}^{a} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_1^2}{4} + \frac{(x_2-x_1)^2}{4} + \frac{(x_2-x_1)^2}{4} + (a-x_2)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x_1^2 + (x_2-x_1)^2 + 2(a-x_2)^2\right] = \frac{1}{4} f_a(x_1,x_2)$$

Dies gilt auf der kompakten Menge $M_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq a\}$. Die stetige Funktion f_a besitzt nach Weierstraß auf M_a ein absolutes Minimum. Dieses Minimum liegt nicht bei $x_1 = 0$ oder $x_1 = x_2$, weil dies das Zusammenfallen zweier Überwege bedeutet. Das ist offenbar schlechter als einen davon an einer beliebigen anderen Stelle anzulegen. Das Miniumum von $f_a(x,y)$ auf dem Rand $x_2 = a$ ist größer als an der stationären Stelle, wie in den Aufgabenteilen a) und b) nachgerechnet wurde.

Es muss also $x_1 = \frac{2a}{5}$ und $x_2 = \frac{4a}{5}$ gewählt werden. Die mittlere Entfernung zu einem Zebrastreifen ist dann $d(\frac{2a}{5}, \frac{4a}{5}) = \frac{1}{4a} \cdot \frac{2a^2}{5} = \frac{a}{10}$, also 10% der Straßenlänge. Nach jeweils 40% der Strecke zum Arbeitsplatz muss ein Zebrastreifen angelegt werden.

Aufgabe 2. In der Prüfung zu Analysis 2 im Sommersemester 2014 ging es um die gleiche Funktion

$$f(x,y) = x^2 - 4xy - 2xe^y + xe^{2y} = x(x - 4y - 2e^y + e^{2y})$$

Einige der dort verlangten Berechnungen und Überlegungen müssen auch hier vorgenommen werden. Insbesondere sind an verschiedenen Stellen die partiellen Ableitungen nützlich:

$$f_x(x,y) = 2x - 4y - 2e^y + e^{2y}\ , \qquad f_y(x,y) = -4x - 2xe^y + 2xe^{2y}$$

$$f_{xx} \equiv 2\ , \qquad f_{xy}(x,y) = -4 - 2e^y + 2e^{2y}\ , \qquad f_{yy}(x,y) = -2xe^y + 4xe^{2y}$$

a) Die Nebenbedingung $x = a$ führt zur Funktion $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g_a(y) = a(a - 4y - 2e^y + e^{2y})$$

$$g_a'(y) = f_y(a,y) = -4a - 2ae^y + 2ae^{2y} = 2a(-2 - e^y + e^{2y}) \stackrel{!}{=} 0$$

Für $a = 0$ ist $g_a \equiv 0$, alle Punkte $(0, y, 0)$ sind zugleich absolute Minima und absolute Maxima. Ansonsten muss der Klammerausdruck verschwinden, also nach der Mitternachtsformel

$$e^y = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+8}\right) = \frac{1}{2}(1 \pm 3) = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Dies ergibt die eindeutige Lösung $y = \ln 2$. Für $a > 0$ gibt es also nur eine stationäre Stelle.

$$g_a(\ln 2) = a(a - 4\ln 2 - 2 \cdot 2 + 4) = a(a - 4\ln 2)$$

Für den Klammerausdruck in $g_a(y) = a(a - 4y - 2e^y + e^{2y})$ gilt

$$\lim_{y \to -\infty} (a - 4y - 2e^y + e^{2y}) = a - 4 \cdot (-\infty) - 0 + 0 = \infty$$

$$\lim_{y \to +\infty} (a - 4y - 2e^y + e^{2y}) = \lim_{y \to +\infty} e^{2y} = \infty$$

Für $a > 0$ ist deshalb $\lim\limits_{y \to \pm\infty} g_a(y) = +\infty$. Der einzige stationäre Punkt $M_a(a, \ln 2, a(a - 4\ln 2))$ muss also das absolute Minimum sein. Maxima gibt es nicht. Das hinreichende

Kriterium über die zweite Ableitung von g_a wird nicht benötigt, bestätigt aber das Ergebnis:

$$g_a''(y) = f_{yy}(a,y) = -2ae^y + 4ae^{2y} = 2ae^y(-1+2e^y) \quad \Rightarrow \quad g_a''(\ln 2) = 12a > 0$$

Es ist damit $f(\{0\} \times \mathbb{R}) = \{0\}$ und $f(\{a\} \times \mathbb{R}) = [a(a-4\ln 2), \infty)$ für $a > 0$.

b) $R = [0,1] \times [0, \ln 2]$ und ∂R sind kompakt. Nach Weierstraß besitzt die stetige Funktion f auf R und auf ∂R absolute Minima und Maxima. Untersuchen wir zuerst den Rand ∂R, der aus den vier Teilen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \ln 2$ besteht.

$x = 0$ und $x = 1$ wurden schon in der vorigen Teilaufgabe untersucht. Sie liefern die Kandidaten $(0, y, 0)$ für $y \in \mathbb{R}$ und $M_1(1, \ln 2, 1 - 4\ln 2)$.

Für $y = 0$ entsteht die Funktion $h_1(x) = x^2 - 2x + x = x^2 - x = x(x-1)$. Diese nach oben geöffnete Parabel hat genau ein Extremum, ein absolutes Minimum in der Mitte zwischen den Nullstellen. Der zugehörige Punkt ist $H_1(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4})$.

Für $y = \ln 2$ entsteht die Funktion $h_2(x) = x^2 - 4x\ln 2 - 2x \cdot 2 + x \cdot 4 = x^2 - 4x\ln 2 = x(x - 4\ln 2)$. Wieder gibt es genau ein Extremum, das absolutes Minimum $H_2(2\ln 2, \ln 2, -4\ln^2 2)$.

Auch die vier Eckpunkte $(0,0)$, $(0, \ln 2)$, $(1, 0)$, $(1, \ln 2)$ müssen berücksichtigt werden. Diese liefern allerdings nur einen neuen Punkt $E(1,0,0)$. Die Liste der Kandidaten für Extrema ist:

$$(0,y,0),\ M_1(1,\ln 2, 1-4\ln 2),\ H_1(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}),\ H_2(2\ln 2, \ln 2, -4\ln^2 2),\ E(1,0,0)$$

H_2 scheidet aus, weil der x-Wert nicht in $[0,1]$ liegt. Die Punkte $(0,y,0)$ sind entsprechend nur für $y \in [0, \ln 2]$ relevant.

$E(1,0,0)$, sowie alle Punkte $(0,y,0)$ mit $y \in [0,\ln 2]$ sind absolute Maxima. Das absolute Minimum ist eindeutig $M_1(1, \ln 2, 1 - 4\ln 2)$. ∂R ist zusammenhängend und f ist stetig. Nach dem Zwischenwertsatz ist auch $f(\partial R)$ zusammenhängend, also ein Intervall. Damit ist $f(\partial R) = [1 - 4\ln 2, 0]$.

Bei $f(R)$ müssen zusätzlich noch Extrema im Innern gesucht werden. Diese liegen an stationären Stellen vor. Aus $f_y(x,y) \stackrel{!}{=} 0$ kann unter Berücksichtigung der Tatsache, dass im Innern $x \neq 0$ ist, leicht y bestimmt werden:

$$0 \stackrel{!}{=} f_y(x,y) = -4x - 2xe^y + 2xe^{2y} = 2x(-2 - e^y + e^{2y})$$

Die Klammer muss also 0 werden, was (siehe erste Teilaufgabe) genau für $y = \ln 2$ der Fall ist. Das liegt aber am Rand und damit nicht im Innern. Folglich ist $f(R) = f(\partial R) = [1 - 4\ln 2, 0]$.

c) $S = [0,3] \times \mathbb{R}$ und ∂S sind nicht kompakt. Die Existenz von absoluten Extremwerten ist deshalb nicht sicher gestellt. $\partial S = \{0, 3\} \times \mathbb{R}$ ist zudem nicht zusammenhängend. Die beiden Komponenten $x = 0$ und $x = 3$ wurden schon in der ersten Teilaufabe untersucht. Es ist $f(\{0\} \times \mathbb{R} = \{0\}$ und $f(\{3\} \times \mathbb{R} = [3(3 - 4\ln 2), \infty)$. Damit ist $f(\partial S) = \{0\} \cup [3(3 - 4\ln 2), \infty)$. Wegen $3(3 - 4\ln 2) > 0$ ist die Bildmenge nicht zusammenhängend.

Bei $S = [0,3] \times \mathbb{R}$ kommt der Wert $y = \ln 2$ für eine stationäre Stelle im Innern in Frage.

Deshalb muss der zugehörige x-Wert ermittelt werden:

$$0 \overset{!}{=} f_x(x, \ln 2) = 2x - 4\ln 2 - 2 \cdot 2 + 4 = 2x - 4\ln 2$$

Die stationäre Stelle ist damit der schon bekannte und zuvor ausgeschiedene Punkt $H_2(2\ln 2, \ln 2, -4\ln^2 2)$.

Wegen $f(\{a\} \times \mathbb{R}) = [a(a - 4\ln 2), \infty)$ für $a > 0$ ist $f(S) = [-4\ln^2 2, \infty)$. Diese Menge ist natürlich zusammenhängend, weil S zusammenhängend ist.

Aufgabe 3. Die Funktion $f(x, y) = x + \frac{1}{x} + \sin(\pi y)$ hat den nicht zusammenhängenden Definitionsbereich

$$D(f_a) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$$

f_a ist in y-Richtung periodisch mit Periode 2:

$$f_a(x, y \pm 2) = x + \frac{1}{x} + a \cdot \sin(\pi(y \pm 2)) = x + \frac{1}{x} + a \cdot \sin(\pi y \pm 2\pi) =$$

$$= x + \frac{1}{x} + a \cdot \sin(\pi y) = f_a(x, y)$$

Deshalb genügt es, die Einschränkung $g_a := f_a\,|((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times [-1, 1))$ zu betrachten. f_a ist zudem punktsymmetrisch zum Ursprung:

$$f_a(-x, -y) = -x + \frac{1}{-x} + a \cdot \sin(-\pi y) = -[x + \frac{1}{x} + a \cdot \sin(\pi y)] = -f_a(x, y)$$

Deshalb kann aus der Betrachtung von $h_a := g_a|((0, \infty) \times [-1, 1))$ auf den Wertebereich von g_a und damit auf den von f_a geschlossen werden.

$$\frac{\partial h_a}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x^2} \overset{!}{=} 0 \quad , \qquad \frac{\partial h_a}{\partial y} = a\pi \cdot \cos(\pi y) \overset{!}{=} 0$$

Es muss also $x = 1$ und (wegen $a \neq 0$) $y = \pm\frac{1}{2}$ sein. Die zugehörigen Punkte sind $S_1(1, -\frac{1}{2}, 2 - a)$ und $S_2(1, \frac{1}{2}, 2 + a)$. Damit ist $W(h_a) = [2 - a, \infty)$. Hieraus ergibt sich

$$W(f_a) = W(g_a) = (-\infty, a - 2] \cup [2 - a, \infty)$$

Für $a < 2$ ist $0 \notin W(f_a)$. Für $a \geq 2$ ist hingegen $W(f_a) = \mathbb{R}$. Genau für $a \geq 2$ ist f_a also surjektiv.

Aufgabe 4.
a) $f_1^{-1}(\{1\}) := \{(x, y) \mid f_1(x, y) = 1\}$. Aus $(0, 0) \in f_1^{-1}(\{1\})$ ergibt sich $f_1((0, 0)) = 1$, also $f_1(\{(0, 0)\}) = \{1\}$.

Weil umgekehrt kein anderer Punkt den Funktionswert 1 besitzt ist $f_1^{-1}([0, 1[) = K \setminus \{(0, 0)\}$.

Ein Beispiel ist $f_1(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$.

b) Weil $\{1\}$ abgeschlossen ist und f_2 stetig, muss auch $f_2^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen sein. Zudem muss $(0,0) \in f_2^{-1}(\{1\})$ gelten, aber nicht $f_2^{-1}(\{1\}) = \{(0,0)\}$.

Über das Bild von $K \setminus \{(0,0)\}$ kann deshalb lediglich $f_2(K \setminus \{(0,0)\}) \supset [0,1[$ geschlossen werden. Die Forderungen an f_2 sind schwächer als die an f_1. Dort könnte $f_1(K \setminus \{(0,0)\}) = [0,1[$ gefolgert werden.

Ein Beispiel ist $f_1(x,y) = 1 - x^2$. Dafür ist $f_2^{-1}(\{1\}) = \{0\} \times [0,1]$ und $f_2(K \setminus \{(0,0)\}) = [0,1]$.

c) Da f_3 stetig ist und K kompakt, muss nach Weierstraß auch $f_3(K)$ kompakt sein. $f_3(K) =]0,1[$ ist daher nicht möglich.

Da K auch zusammenhängend ist, muss nach dem Zwischenwertsatz $f_3(K)$ zusammenhängend sein. $f_3(K) = \{0,1\}$ scheidet damit aus.

Die geforderte Eigenschaft ist nicht erfüllbar. Für $f_3^{-1}(\{1\})$ kann damit alles gefolgert werden, etwa $f_3^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ oder $f_3^{-1}(\{1\}) = K$.

Aufgabe 5. Benötigt werden folgende Funktionswerte und Ableitungen:

	bei $(0,0)$	bei $(\frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{8})$
$f(x,y) = e^{x+y}\cos(x-y)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$f_x(x,y) = e^{x+y}\cos(x-y) - e^{x+y}\sin(x-y)$	1	0
$f_y(x,y) = e^{x+y}\cos(x-y) + e^{x+y}\sin(x-y)$	1	$\sqrt{2}$
$f_{xx}(x,y) = -2e^{x+y}\sin(x-y)$	0	$-\sqrt{2}$
$f_{xy}(x,y) = 2e^{x+y}\cos(x-y)$	2	$\sqrt{2}$
$f_{yy}(x,y) = 2e^{x+y}\sin(x-y)$	0	$\sqrt{2}$

Bei Entwicklung um $(\frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{8})$ ergibt sich

$$p_0(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ , \quad p_1(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}(y + \frac{\pi}{8})\ ,$$

$$p_2(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}\cdot(y+\frac{\pi}{8}) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot[-(x-\frac{\pi}{8})^2 + 2(x-\frac{\pi}{8})(y+\frac{\pi}{8}) + (y+\frac{\pi}{8})^2]$$

Bei Entwicklung um $(0,0)$ erhält man

$$p_0(x,y) = 1\ , \quad p_1(x,y) = 1 + x + y\ , \quad p_2(x,y) = 1 + x + y + 2xy$$

Da $\mathbb{R}^2$ offen und konvex ist und $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, gibt es ein für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ein $t \in (0,1)$ mit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= p_1(x,y) + R_1 = \\ &= 1 + x + y - e^{\xi+\eta}\sin(\xi-\eta)\cdot x^2 + 2e^{\xi+\eta}\cos(\xi-\eta)\cdot xy + e^{\xi+\eta}\sin(\xi-\eta)\cdot y^2 = \\ &= 1 + x + y + e^{t(x+y)}\cdot[-\sin(t(x-y))\cdot x^2 + 2\cos(t(x-y))\cdot xy + \sin(t(x-y))\cdot y^2] \end{aligned}$$

Aufgabe 6.
a) Um die geforderten Eigenschaften direkt anhand der Reihe zu erkennen, muss die Entwicklung um $(0,1)$ geschehen. Die z-Koordinate von M definiert den Funktionswert $f(0,1) = 0$ und damit das konstante Glied der Potenzreihe. Die beiden Glieder ersten Grades sind $f_x(0,1)$ und $f_y(0,1)$. Sie müssen nach dem notwendigen Kriterium für Extremwerte verschwinden. Um ein Minimum zu erhalten, werden am einfachsten $f_{xx}(0,1)$ und $f_{yy}(0,1)$ positiv gewählt und $f_{xy} = 0$. Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}^2$ - ohne Abbruch der Reihe - erhält man etwa, wenn in einer Variable die e-Reihe verwendet wird. Möglich ist etwa

$$f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

b) Um den angegebene Konvergenzbereich zu erhalten, muss zunächst die Entwicklungsmitte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gewählt werden. Für einen Sattelpunkt muss $f_x(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = f_y(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$ sein. Die Reihe hat demnach keine Glieder vom Grad 1. Der Funktionswert, also das konstante Glied ist gleichgültig. Einen Sattelpunkt erhält man dann am einfachsten, indem man $f_{xy}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \neq 0$ und $f_{xx}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = f_{yy}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$ wählt. Dies wird durch die Glieder zweiten Grades gesteuert. Den geforderten Konvergenzbereich in y erhält man durch eine Potenzreihe die (ähnlich der ln-Reihe) am rechten Rand eine harmonische Reihe und am linken Rand eine alternierende harmonische Reihe ergibt. Den geforderten Konvergenzbereich in x erhält man durch eine Potenzreihe die (ähnlich der Arcustangens-Reihe) an beiden Rändern im wesentlichen eine alternierende harmonische Reihe darstellt.

$$g(x,y) = 87 + (x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2}) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n}(y-\frac{1}{2})^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{n}(x-\frac{1}{2})^{2n+1}$$

$$= 87 + (x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2}) + \left[\frac{8}{3}(y-\frac{1}{2})^3 + \frac{16}{4}(y-\frac{1}{2})^4 + \frac{32}{5}(y-\frac{1}{2})^5 + \ldots\right] +$$

$$+ \left[-8(x-\frac{1}{2})^3 + \frac{32}{2}(x-\frac{1}{2})^5 - \frac{128}{3}(x-\frac{1}{2})^7 + - \ldots\right]$$

$$= 87 + (x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2}) -$$

$$-8(x-\frac{1}{2})^3 + \frac{8}{3}(y-\frac{1}{2})^3 + 4(y-\frac{1}{2})^4 + 16(x-\frac{1}{2})^5 + \frac{32}{5}(y-\frac{1}{2})^5 + - \ldots$$

Aufgabe 7. Die Funktion $f(x,y)$ ist für alle $\alpha, \beta \geq 0$ auf ihrem (maximalen) Definitionsbereich $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig. Zu prüfen ist, für welche α, β sie an der Stelle $(0,0)$ stetig ergänzt werden kann. Dies geschieht durch Übergang zu Polarkoordiaten mittels $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$:

$$z = f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2} = \frac{r^{\alpha+\beta}\cos^\alpha\varphi\sin^\beta\varphi}{r^2} = r^{\alpha+\beta-2}\cos^\alpha\varphi\sin^\beta\varphi$$

Für $\alpha + \beta > 2$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^{\alpha+\beta-2} \cos^\alpha \varphi \sin^\beta \varphi = 0$$

Für andere α, β existiert der Grenzwert offenbar nicht. Genau für $\alpha+\beta > 2$ ist demnach eine stetige Erweiterung möglich. Die eindeutige Fortsetzung ist

$$f^\star(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$