PRÜFUNGSLEISTUNG IM WINTER–SEMESTER 2009/10

FACH :	Analysis A	NAME :	
DATUM :	05.02.2010	SEMESTER :	
ZEIT :	08.30 – 10.30		
PRÜFER :	Prof. Dr. Erben / Prof. Dr. Fischer		

HILFSMITTEL : Skript mit eigenen Unterlagen, zwei Bücher

ANLAGEN : keine

Die angegebenen Punktzahlen (Summe 120) dienen zu Ihrer Orientierung; die endgültige Wertung kann davon noch abweichen.

Ihre Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der Gang der Rechnung nachvollziehbar ist.

Aufgabe 1 (24 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, wenn sie existieren:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{3}}{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{6}}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^5-5x^2+3}{2x^3+x^2-8x+5}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2+\sin x)}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} (5x+1)\cdot\sin(1/x)$

Aufgabe 2 (12 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Ableitungen gerader Ordnungen $2n$ der Funktion $f(x) = x\cdot\sin x$ gegeben sind durch

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n\,(x\cdot\sin x - 2n\cos x)\ .$$

Aufgabe 3 (36 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}-x}\,.$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D(f)$ und alle Nullstellen von f an.

b) Bestimmen Sie $f'(x)$. Wo ist f' definiert? Wie verhält sich $f'(x)$, wenn sich x den Randpunkten von $D(f)$ nähert?

c) Warum existiert das globale Maximum von f auf $D(f)$? Bestimmen Sie diese Stelle und den zugehörigen Funktionswert. (Vermeiden Sie die Berechnung von f''.)

d) Geben Sie den Wertebereich $W(f)$ an.

e) Skizzieren Sie den Graphen von f in einem geeigneten Maßstab.

f) Geben Sie das größte $a\in\mathbb{R}$ an, so dass f auf dem Intervall $[0,a]$ streng monoton wachsend ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} der auf das Intervall $[0,a]$ eingeschränkten Funktion f. Geben Sie den Definitionsbereich $D(f^{-1})$ und den Wertebereich $W(f^{-1})$ an.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Gegeben ist das Polynom

$$p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + 5x^3 + 15x^2 - 6x - 11 \; .$$

a) Wie müssen die Koeffizienten a_4 und a_5 gewählt werden, damit p an der Stelle $x_0 = -1$ eine doppelte Nullstelle besitzt? Hinweis: Verwenden Sie die Ableitung $p'(x)$.

b) Zerlegen Sie das Polynom, das Sie in Teil a) erhalten haben, vollständig in reelle lineare und quadratische Faktoren.

c) In welchen Intervallen nimmt das Polynom aus Teil b) positive (> 0) bzw. negative (< 0) Werte an?

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Für $a > 0$ ist $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{3}{a} \cdot \sin(ax) + \frac{a}{x^2+3} \cdot \cos(ax) \; .$$

Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} f_a(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{a\to 0+} f_a(x) \; .$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)

Gegeben ist ein Punkt $P(a, b)$ im ersten Quadranten, also mit Koordinaten $a, b > 0$.

Gesucht ist unter allen Geraden durch P mit negativer Steigung diejenige, für die das aus dem Ursprung O und den beiden Schnittpunkten Q und R mit den Koordinatenachsen gebildete Dreieck den kleinsten Flächeninhalt hat.

Bestimmen Sie diese Gerade und geben Sie den zugehörigen Flächeninhalt an.