HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **Winter-Semester 2011/2012**

KLAUSURARBEIT IM BACHELOR-STUDIENGANG MATHEMATIK

MODUL:	**Analysis 1**	FACH:	**Analysis A**
DATUM:	7. Februar 2012	ZEIT:	10:30 – 12:30
PRÜFER:	Dr. Reitz, Dr. Erben	SEMESTER:	MB1A und MB1B

HILFSMITTEL:	Skript (1-2 Ordner) und 2 Bücher (inklusive Formelsammlung). Taschenrechner sind ausdrücklich nicht zugelassen.
ANLAGEN:	keine
ANFORDERUNG:	Ausreichend (4.0) sind 50 der möglichen 120 Punkte.

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Sie sollten **6 karierte Doppelbögen** und 2 Konzeptblätter erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die Anwendbarkeit von Regeln muss begründet sein.
- Diese Aufgabenblätter und das Konzeptpapier sollen **nicht** abgegeben werden.

TIPP:

- Die erreichbaren Punkte (120) entsprechen der Bearbeitungszeit (120 min.). Die bei den einzelnen Aufgaben ausgewiesenen Punktzahlen sind damit Richtwerte für die Bearbeitungszeiten.

Aufgabe 1. (17 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan\sqrt{4x}}{\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} \quad (m,n\in\mathbb{N})$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\cdot|\cos x|$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cdot(x^8+1)}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+q^n)^{1/n} \quad (q>1)$

Aufgabe 2. (22 Punkte)
a) Lösen Sie die folgende Gleichung. Schreiben Sie dazu zunächst die rechte Seite in Exponentialform.

$$z^2 = 1+i\cdot\sqrt{3}$$

b) Bestimmen Sie die vier komplexen Lösungen z_{b1} bis z_{b4} der Gleichung

$$z^4 - 2z^2 + 4 = 0$$

c) Diese vier Lösungen z_{b1} bis z_{b4} bilden in der Gaußschen Zahlenebene ein Rechteck. Welchen Umfang U und welchen Flächeninhalt F besitzt dieses Rechteck?

d) Geben Sie eine Gleichung $z^n = a$ (mit $n\in\mathbb{N}$ und $a\in\mathbb{C}$) an, welche ebenfalls die Lösungen z_{b1} bis z_{b4} besitzt. Welche zusätzlichen Lösungen besitzt diese Gleichung Gleichung $z^n = a$?

Aufgabe 3. (31 Punkte)
a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit des reellen Parameter $a\geq 0$ den Definitionsbereich, die Nullstellen und die Polstellen der Funktion

$$f_a(x) = \frac{3x^2 - a\cdot x}{1-x^4}$$

b) Zerlegen Sie $f_a(x)$ für $a=0$ in Partialbrüche. Geben Sie damit (irgend) eine Stammfunktion von f_0 an. Welche Stammfunktion von f_0 geht für $x\to\infty$ gegen 0?

c) Berechnen Sie über die Substitution $x = e^{-t}$ das unbestimmte Integral

$$\int \frac{e^{-3t}}{1-e^{-4t}}\,dt$$

d) Prüfen Sie in Abhängigkeit von a die Existenz des (eigentlichen oder uneigentlichen) Integrals

$$\int_0^2 f_a(x)\,dx$$

Aufgabe 4. (13 Punkte)
a) Die Funktion f erfülle auf dem Intervall $[a, b]$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung und es gelte $|f'(t)| \leq 1$ für alle $t \in (a, b)$. Zeigen Sie:

$$|f(b) - f(a)| \;\leq\; |b - a|.$$

b) Begründen Sie mit Hilfe von a) die Aussage

$$|\ln b - \ln a| \;\leq |b - a| \quad \text{für} \quad 1 \leq a < b.$$

c) Zeigen Sie, dass sogar gilt

$$|\ln b - \ln a| \;\leq \frac{1}{a} \cdot |b - a| \quad \text{für} \quad 1 \leq a < b.$$

d) Gilt auch

$$|\ln b - \ln a| \;\leq \frac{1}{b} \cdot |b - a| \quad \text{für} \quad 1 \leq a < b\,?$$

Aufgabe 5. (18 Punkte)
a) Ermitteln Sie durch partielle Integration eine Rekursionsformel für

$$I_n \;=\; \int x^n e^{-x}\, dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\int x^n e^{-x}\, dx \;=\; -n! \cdot e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \;+\; C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

c) Bestimmen Sie mit dieser Formel das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Aufgabe 6. (19 Punkte)
a) Es sei

$$f(x) := \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die beiden senkrechten Geraden $x = u$ und $x = u{+}1$ $(u \in \mathbb{R})$ begrenzen mit der $x-$Achse und dem Funktionsgraphen von f eine Fläche mit dem Inhalt $A(u)$. Bestimmen Sie u so, dass die Fläche den größtmöglichen Wert annimmt. Wie lautet der maximale Flächeninhalt?
Hinweis: Vermeiden Sie die Berechnung einer 2. Ableitung!

b) Zeigen Sie allgemein: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt für jede stationäre Stelle u_0 der Funktion $G(u) := \int\limits_u^{u+1} f(x)dx$ die Aussage $f(u_0) = f(u_0 + 1)$.