HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **Sommer-Semester 2012**

KLAUSURARBEIT IM BACHELOR-STUDIENGANG MATHEMATIK

MODUL:	**Analysis 2**	FACH:	**Analysis B**
DATUM:	12. Juli 2012	ZEIT:	13:30 – 15:30
PRÜFER:	Dr. Wolfgang Erben	SEMESTER:	MB2A und MB2B

HILFSMITTEL:	Skript (1-2 Ordner) und 2 Bücher (inklusive Formelsammlung). Taschenrechner sind ausdrücklich nicht zugelassen.
ANLAGEN:	keine
ANFORDERUNG:	Ausreichend (4.0) sind 50 der möglichen 120 Punkte.

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Sie sollten **4 karierte Doppelbögen** und 2 Konzeptblätter erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die Anwendbarkeit von Regeln muss begründet sein.
- Diese Aufgabenblätter und das Konzeptpapier sollen **nicht** abgegeben werden.

TIPP:

- Die erreichbaren Punkte (120) entsprechen der Bearbeitungszeit (120 min.). Die bei den einzelnen Aufgaben ausgewiesenen Punktzahlen sind damit Richtwerte für die Bearbeitungszeiten.

Aufgabe 1. (27 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \cos 7x - 2\cos 5x + \cos x$$

a) Geben Sie die Taylor-Reihe von $f(x)$ (um $x = 0$) in Summenschreibweise an. Wo konvergiert die Reihe gegen $f(x)$?

b) Geben Sie das fünfte Taylor-Polynom p_5 von $f(x)$ an.

c) Zeigen Sie, dass $f(x) \cdot x^{-3}$ an der Stelle $x = 0$ zu einer differenzierbaren Funktion $g(x)$ ergänzbar ist und geben Sie diese Funktion $g(x)$ an. Bestimmen Sie $g'(0)$ und $g''(0)$.

d) Geben Sie $g'(x)$ als Potenzreihe an. Wo konvergiert diese Potenzreihe?

Aufgabe 2. (27 Punkte)

Vorgelegt ist für $a \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$a \cdot y'' + y' + y = 0$$

a) Für welchen Wert von a ist $y_1(x) = e^{2x}$ eine Lösung der Differentialgleichung? Was ist dann die allgemeine Lösung?

b) Für welchen Wert von a ist $y_2(x) = e^{-x}$ eine Lösung der Differentialgleichung? Geben Sie auch für diesen Fall die allgemeine Lösung an.

c) Wie muss a gewählt werden, damit die Differentialgleichung eine Lösung der Form $y_3(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ besitzt? Was ist nun die allgemeine Lösung?

d) Für welche a gibt es eine Lösung y_4 mit $y_4(0) = 0$ und $y_4'(0) = 0$? Geben Sie diese Lösung an.

e) Für welche Werte von a besitzt das zugehörige Anfangswertproblem $y(0) = 0$ und $y'(0) = 3$ eine eindeutige Lösung y_5?

Achtung: Die Antwort muss (wie immer!) begründet sein. Die Lösung braucht aber nicht bestimmt zu werden.

Aufgabe 3. (35 Punkte)

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) \quad := \quad \int_x^y (\cos t - \frac{1}{2})\, dt$$

a) Geben Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f an. Zeigen Sie: In stationären Stellen ist die Hesse-Matrix invertierbar.

b) Geben Sie ein relatives Minimum, ein relatives Maximum und einen Sattelpunkt von f an.

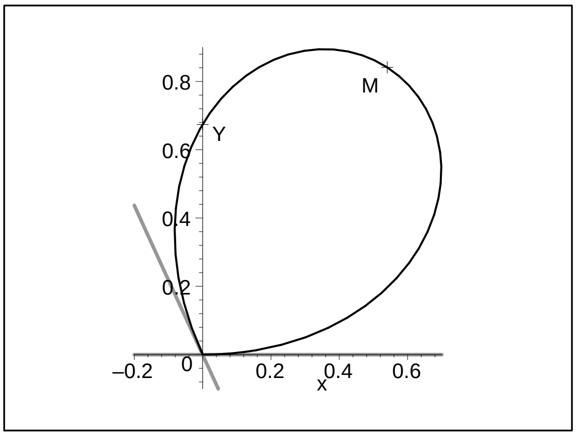
c) Zeigen Sie, dass es (auf $\mathbb{R}^2$) keine absoluten Extrema gibt. Begründen Sie, dass f im Kreis $x^2 + y^2 \leq 87$ absolute Minima und Maxima besitzt.

d) Geben Sie im Bereich $x \leq y$ das Infimum und das Supremum von f an. Eine Begründung ist (ausnahmsweise!) nicht verlangt.

Aufgabe 4. (31 Punkte)

Die nebenstehend skizzierte geschlossene Kurve K kann in Polarkoordinaten beschrieben werden durch

$$r = f(\varphi) = \varphi \cdot (2 - \varphi)$$



a) Welche Fläche schließt die Kurve ein?

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung $\underline{x}(t)$ der Kurve K an. Bestimmen Sie den markierten Schnittpunkt Y mit der y-Achse.

c) Welchen Winkel α schließen links- und rechtsseitige Tangente im Ursprung O ein? Ist die Kurve K glatt?

d) Wie weit entfernt sich die Kurve maximal vom Ursprung O? Geben Sie den zugehörigen Kurvenpunkt M an.

e) Zeigen Sie, dass für das Bogenelement ds gilt

$$ds = ((\varphi - 1)^2 + 1)\, d\varphi$$

Berechnen Sie damit die Länge der Kurve.