HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART | STUDIENGANG MATHEMATIK

PRÜFUNGSLEISTUNG IM SOMMER–SEMESTER 2010 FÜR DIE BACHELORVORPRÜFUNG

FACH	:	Analysis B	NAME	:
DATUM	:	07.07.2010	SEMESTER	:
ZEIT	:	08.30 – 10.30		
PRÜFER	:	Prof. Dr. Erben / Prof. Dr. Fischer		

HILFSMITTEL : Skript mit eigenen Unterlagen, zwei Bücher

ANLAGEN : keine

Die angegebenen Punktzahlen (Summe 120) dienen zu Ihrer Orientierung; die endgültige Wertung kann davon noch abweichen.

Ihre Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der Gang der Rechnung nachvollziehbar ist.

Aufgabe 1 (32 Punkte)

Gegeben ist eine ebene Kurve mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = \frac{5t}{1+4t^2}\ , \quad y(t) = 1 - t^2 \qquad \text{für } -1 \leq t \leq 1.$$

a) Geben Sie Anfangs- und Endpunkt der Kurve an. Welche Steigung hat die Kurve in diesen Kurvenpunkten?

b) Bestimmen Sie die Kurvenpunkte mit waagrechter beziehungsweise senkrechter Tangente.

c) Warum ist die Kurve symmetrisch zur y-Achse?

d) Skizzieren Sie die Kurve in einem geeigneten Maßstab.

e) Berechnen Sie den Inhalt der von der Kurve und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.
Hinweis: Verwenden Sie dazu den geeigneteren der beiden Integranden $\dot{x}(t)y(t)$ und $x(t)\dot{y}(t)$.

Aufgabe 2 (17 Punkte)

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ in eine Potenzreihe um $x_0 = 1$. Welchen Konvergenzradius hat diese Potenzreihe? Untersuchen Sie das Verhalten in den Randpunkten.

b) Leiten Sie die Potenzreihe, die Sie in Teil a) erhalten haben, ab. Wie erhalten Sie daraus die Entwicklung der Funktion $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ um $x_0 = 1$? Welchen Konvergenzradius hat diese Potenzreihe? Untersuchen Sie das Verhalten in den Randpunkten.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Gegeben ist die Funktion zweier Veränderlicher $f(x,y) = x \cdot \sin y - y \cdot \sin x + x^5$.

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der Ordnungen 1 und 2. Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(0,0)$ und die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f(0,0)$.

b) Geben Sie das Taylor-Polynom vom Grad 7 um $(0,0)$ an. Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Taylor-Entwicklung, welche partiellen Ableitungen 4. Ordnung im Punkt $(0,0)$ von Null verschieden sind.

c) Untersuchen Sie, ob f in $(0,0)$ ein lokales Extremum besitzt.
Hinweis: Untersuchen Sie das Verhalten von f auf der Geraden $y = x$, also die Funktion $g(x) = f(x,x)$.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

a) Ermitteln Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^4-1}\,dx$.

b) Berechnen Sie die Integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-1}{x^4-1}\,dx$ und $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3-1}{x^4-1}\,dx$.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $(x^4-1)\cdot y' = (x^3-1)\cdot y$.

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $(x^4-1)\cdot y' = (x^3-1)\cdot y$, $y(-87) = 0$.

Aufgabe 5 (20 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' + 2y = \sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}$.

b) Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung an, die die Anfangsbedingung $y(-\ln\sqrt{2}) = 0$ erfüllt. Auf welchem Intervall stellt diese Funktion eine Lösung des Anfangswertproblems dar?