HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART | STUDIENGANG MATHEMATIK

PRÜFUNGSLEISTUNG IM | SOMMER–SEMESTER 2009 | FÜR DIE BACHELORVORPRÜFUNG

FACH :	Analysis B	NAME :	
DATUM :	09.07.2009	SEMESTER :	
ZEIT :	08.30 – 10.30		
PRÜFER :	Prof. Dr. Erben / Prof. Dr. Fischer		

HILFSMITTEL : Skript mit eigenen Unterlagen, zwei Bücher

ANLAGEN : keine

Die angegebenen Punktzahlen (Summe 120) dienen zu Ihrer Orientierung; die endgültige Wertung kann davon noch abweichen.

Ihre Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der Gang der Rechnung nachvollziehbar ist.

Aufgabe 1 (29 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = (86 + \sin x) \cdot (y^2 + \cos y)$.

a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f und die Hesse-Matrix H_f. Begründen Sie, warum überall $f_{yy} > 0$ gilt.

b) Geben Sie die Tangentialebenen der Fläche $z = f(x, y)$ an den Stellen $(0, 0)$ und $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ an.

c) Zeigen Sie, dass $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(\frac{\pi}{2}, 0)$ stationäre Stellen von f sind. Prüfen Sie jeweils, ob es sich um ein relatives Minimum, ein relatives Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

d) Zeigen Sie, dass alle stationären Stellen von f auf der x-Achse liegen. Geben Sie alle relativen Minima und alle relativen Maxima an.

Aufgabe 2 (26 Punkte)

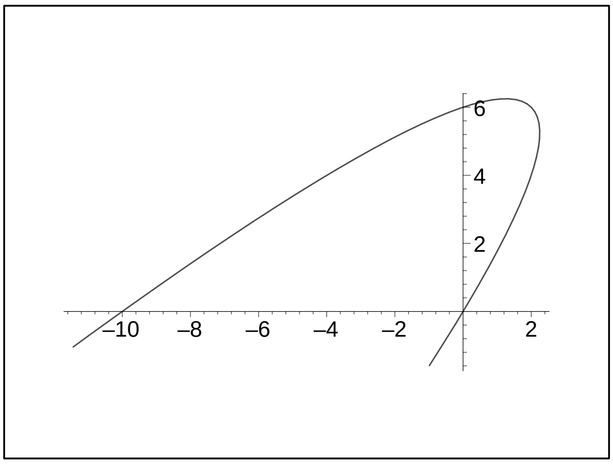
Gegeben ist eine ebene Kurve mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = (2 - t) \cdot (1 + t) \ , \quad y(t) = (2 - t) \cdot (3 + t) \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche F_y, die von der Kurve und der y-Achse eingeschlossen wird.

b) Welchen Inhalt besitzt die Fläche F_x zwischen Kurve und x-Achse?

c) Welchen Flächeninhalt besitzt ein achsenparalleles Rechteck, das die Fläche F_y enthält, mindestens?



Aufgabe 3 (24 Punkte)

Vorgelegt ist - für $\alpha \in \mathbb{R}$ - die Reihe

$$\frac{2^\alpha}{2^3+2^\alpha}+\frac{3^\alpha}{3^3+3^\alpha}+\frac{4^\alpha}{4^3+4^\alpha}+\frac{5^\alpha}{5^3+5^\alpha}+\frac{6^\alpha}{6^3+6^\alpha}+\dots$$

a) Geben Sie die Reihe in Summen-Schreibweise an. Zeigen Sie, dass die Reihe für $\alpha = 1$ konvergiert und für $\alpha = 2$ divergiert.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe? Für welche α ist diese Konvergenz absolut?

c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ Konvergenz und absolute Konvergenz der Reihe

$$\frac{1^\alpha}{1^3+1^\alpha}-\frac{2^\alpha}{2^3+2^\alpha}+\frac{3^\alpha}{3^3+3^\alpha}-\frac{4^\alpha}{4^3+4^\alpha}+\frac{5^\alpha}{5^3+5^\alpha}-+\dots$$

Aufgabe 4 (15 Punkte)

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-2x^2}$ in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$ bis zum Glied zehnter Ordnung.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist diese Potenzreihe konvergent?

c) Bestimmen Sie (nicht durch Ableiten!) $f^{(10)}(0)$. Auftretende Fakultäten müssen nicht ausgerechnet werden.

Aufgabe 5 (26 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$.

Verwenden Sie dazu die Substitution $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ erfüllt. Auf welchem Intervall stellt diese Funktion eine Lösung des Anfangswertproblems dar?

c) Bestimmen Sie jeweils die Lösung der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingung $y(1) = -1$ beziehungsweise $y(-1) = -1$ erfüllt. Auf welchem Intervall stellt die jeweilige Funktion eine Lösung des Anfangswertproblems dar?