

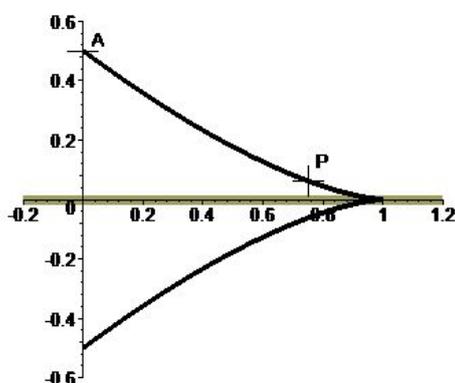
Thema: Flächen und Körper

Aufgabe 1. SS 2014 (32 Punkte). Durch die Parameterdarstellung

$$\underline{x}(t) = \left(\cos^2 t, -\frac{1}{2} \sin^3 t \right)$$

mit $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wird die nachstehend gezeigte K beschrieben.

a) Geben Sie die Gleichung $y = mx + b$ der Tangente im Anfangspunkt A der Kurve an.

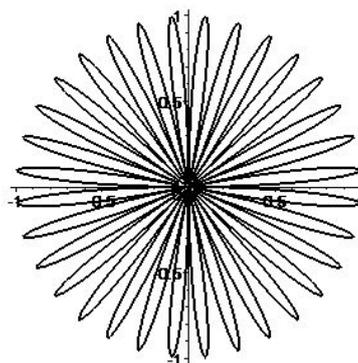


- b) Zeigen Sie, dass der Punkt $P(\frac{3}{4}, \frac{1}{16})$ auf der Kurve liegt.
- c) Begründen Sie, dass es sich bei der Kurve um eine symmetrisch zur x -Achse liegende Jordan-Kurve handelt. Ist die Kurve glatt?
- d) Zusammen mit der y -Achse schließt K ein Flächenstück M ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt von M .
- e) Ermitteln Sie die Länge der Kurve.

Aufgabe 2. Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die in Polarkoordinaten-Darstellung gegebene Kurve $K(n)$:

$$r = |\sin(n \cdot \varphi)|, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Das nachstehende Bild zeigt die Kurve für $n = 16$. Beschreiben Sie das Aussehen der Kurve für allgemeines n . Zeigen Sie, dass jede der Kurven sowohl zur x -Achse als auch zum Ursprung symmetrisch ist. Sind die Kurven auch symmetrisch zur y -Achse?



Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Schwerpunkt für allgemeines n .

Aufgabe 3. Sucof, die Hauptstadt des kleinen, vollkommen ebenen Landes Lebarapleppod, liegt 22 km westlich des geradlinig in Nord-Süd-Richtung verlaufenden Flusses Tiel. Landesvermesser haben festgestellt, dass von jedem Punkt der Landesgrenze die Summe der Entfernungen zur Hauptstadt und zum Fluss Tiel 122 km beträgt.

- a) Ermitteln Sie den Verlauf der Grenze und zeichnen Sie eine Karte von Lebarapleppod. Welche Fläche hat das Land?
- b) Berechnen Sie die Zentren (=Flächenschwerpunkt) von Ost- und Westlebarapleppod (=östlich bzw. westlich von Tiel gelegener Teil).
- c) Im Zentrum von Lebarapleppod soll ein Fußballstadion errichtet werden. Bestimmen Sie diesen Ort.

Aufgabe 4. Die Außenwand eines Trinkglases entsteht durch Rotation der Kurve

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt[5]{x}, \quad 0 \leq x \leq h$$

um die x -Achse. Alle Werte sind dabei in cm zu verstehen.

- a) Wie hoch (h) muss das Glas sein, damit es (bis zum Rand) 0,3l fasst?
- b) Wo befindet sich der Schwerpunkt des mit 0,25l gefüllten Glases, wenn das Gewicht des Glases gegenüber dem Inhalt vernachlässigt werden kann?