Aufgabe 1.
a) Es ist

$$\dot{x}(t) = -2\cos t \cdot \sin t\ , \qquad \dot{y}(t) = -\frac{3}{2}\sin^2 t \cdot \cos t \qquad \underline{\dot{x}}(t) = -\sin t \cdot \cos t \cdot (2,\ \frac{3}{2}\sin t)$$

Im Anfangspunkt A ist $t = -\frac{\pi}{2}$, also $\underline{\dot{x}} = \underline{0}$. Die Tangentensteigung m im Anfangspunkt muss als Grenzwert ermittelt werden:

$$m = \lim_{t \to -\frac{\pi}{2}+} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t \to -\frac{\pi}{2}+} \frac{3}{4}\sin t = -\frac{3}{4}$$

Der y-Achsenabschnitt b der Tangente in A ergibt sich leicht:

$$\underline{x}(-\frac{\pi}{2}) = \left(0,\ \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

Die Tangente im Anfangspunkt A hat damit die Gleichung

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

b) Aus dem y-Wert kann der Parameterwert des Kurvenpunktes eindeutig ermittelt werden:

$$-\frac{1}{2}\sin^3 t \overset{!}{=} \frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{\pi}{6}$$

Eine Überprüfung des x-Wertes ergibt, dass der zugehörige Kurvenpunkt tatsächlich P ist:

$$x(-\frac{\pi}{6}) = \cos^2(-\frac{\pi}{6}) = \cos^2(\frac{\pi}{6}) = (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = \frac{3}{4}$$

c) Die Symmetrie zur x-Achse ergibt sich, weil das Parameterintervall $I := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ symmetrisch zu $t = 0$ ist und für alle $t \in I$ gilt

$$x(-t) = \cos^2(-t) = \cos^2(t) = x(t) \text{ und } y(-t) = -\frac{1}{2}\sin^3(-t) = \frac{1}{2}\sin^3(t) = -y(-t)$$

Die Funktion $\sin t$ ist im Intervall I streng monoton (fallend). Damit ist auch $\sin^3 t$ streng monoton (fallend). Folglich ist $y(t) = -\sin^3 t$ streng monoton (wachsend) und somt injektiv. Zu verschiedenen Parameterwerten gehören immer verschiedene y-Werte, also auch verschiedene Punkte. Die zeigt, dass die Kurve K eine Jordan-Kurve ist.

Die Kurve ist nicht glatt, an der Stelle $t = 0$, also im Punkt $B(1, 0)$ befindet sich ein Knick. Wäre die Kurve in B glatt müsste wegen der Symmetrie zur x-Achse die Tangente senkrecht sein. Für die Steigung m dieser Tangente gilt aber

$$m = \lim_{t \to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{3}{4}\sin t = 0$$

d) Für den Inhalt $|M|$ des Flächenstücks gilt

$$|M| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dot{x}y\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^4 t\,dt$$

Mit der Sustitution $u = \sin t$, also $du = \cos t dt$ ergibt sich schließlich

$$|M| = \int_{-1}^{1} u^4\,du = \frac{1}{5}u^5\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

e) Für das Geschwindigkeitsquadrat ergibt sich

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4\cos^2 t \sin^2 t + \frac{9}{4}\sin^4 t \cos^2 t = \frac{1}{4}\sin^2 t \cos^2 t(16 + 9\sin^2 t)$$

Für die Länge L der Kurve gilt

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = 2 \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin t \cos t \sqrt{16 + 9\sin^2 t}\,dt$$

Mit der Sustitution $u = 16 + 9\sin^2 t$, also $du = 18 \sin t \cos t dt$ ergibt sich

$$L = \frac{1}{18}\int_{16}^{25} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{16}^{25} = \frac{1}{27}[125 - 64] = \frac{61}{27}$$

Aufgabe 2.
a) Die Kurve K(16) hat 32 „Zacken". Die Kurve K(n) hat 2n solcher „Zacken". Wegen

$$r(\varphi + \pi) = |\sin(n(\varphi + \phi))| = |\sin(n\varphi + n\phi)| = |\pm\sin(n\varphi)| = |\sin(n\varphi)| = r(\varphi)$$

ist jede der Kurven punktsymmetrisch zum Ursprung. Wegen

$$r(2\pi - \varphi) = |\sin(n(2\pi - \varphi))| = |\sin(2n\pi - n\varphi)| = |\sin(n\varphi)| = r(\varphi)$$

sind die Kurven allesamt symmetrisch zur x-Achse. Kurven, welche punktsymmetrisch zum Ursprung und zur x-Achse liegen sind aber stets auch zur y-Achse symmetrisch.

b) Für den Flächeninhalt A(n) gilt:

$$A(n) = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \sin^2(n \cdot \varphi)\,d\varphi = \boxed{\begin{array}{c|c} u = n\varphi & \varphi = 2\pi \Rightarrow u = 2n\pi \\ du = nd\varphi & \varphi = 0 \Rightarrow u = 0 \end{array}}$$

$$= \frac{1}{2n}\int_{0}^{2n\pi} \sin^2 u du = \frac{1}{2n} \cdot n\pi = \frac{\pi}{2}$$

Der Flächeninhalt ist demnach unabhängig von n. Da die Kurven allesamt symmetrisch zu den beiden Achsen liegen, befindet sich ihr Schwerpunkt immer im Ursprung.

Aufgabe 3.
a) Wir legen das Koordinatensystem so, dass der Fluss Tiel mit der y-Achse zusammenfällt und die Hauptstadt Sucof im Punkt (-22,0) liegt. Dann gilt für einen Punkt (x,y) auf der Landesgrenze:

$$\sqrt{(x+d)^2+y^2}+|x|=s \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{(x+d)^2+y^2}=s-|x|$$

Wir betrachten zunächst den Teil östlich des Tiel, also $x>0$:

$$\sqrt{(x+d)^2+y^2}=s-x \qquad \Rightarrow \qquad (x+d)^2+y^2=(s-x)^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad y^2+\left(d^2-s^2\right)=-2x\,(d+s) \qquad \Leftrightarrow \qquad x=\frac{1}{2}\,(s-d)-\frac{1}{2\,(s+d)}y^2$$

Nun bestimmen wir den westlichen Teil, also den Teil $x<0$:

$$\sqrt{(x+d)^2+y^2}=s+x \qquad \Rightarrow \qquad (x+d)^2+y^2=(s+x)^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad y^2+\left(d^2-s^2\right)=2x\,(s-d) \qquad \Leftrightarrow \qquad x=-\frac{1}{2}\,(s+d)+\frac{1}{2\,(s-d)}y^2$$

Es handelt sich also um eine Doppelparabel (daher der Name Lebarapleppod). Die Hauptstadt Sucof liegt im (zusammenfallenden) Brennpunkt (=Focus) der beiden Parabeln. Der Fluss Tiel ist zu den beiden Leitgeraden der Parabeln parallel. Mit den konkreten Werten für d und s ergibt sich (in km)

$$x=50-\frac{1}{288}y^2 \qquad \text{für } x>0$$

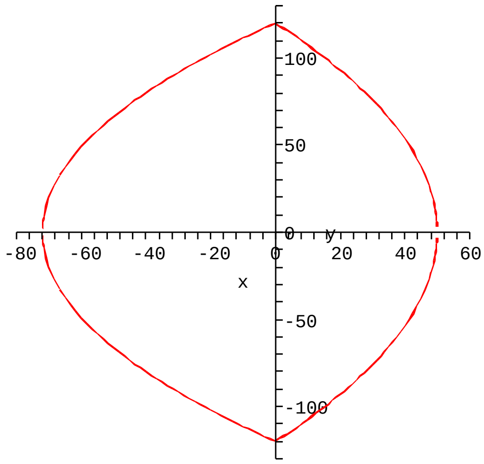
$$x=-72+\frac{1}{200}y^2 \qquad \text{für } x<0$$

Die beiden Schnittpunkte mit der y-Achse sind bei $y=-120$ und $y=120$. Für die Fläche des Landes erhält man:

$$F=\int_{-120}^{120}\left[\left(50-\frac{1}{288}y^2\right)-\left(-72+\frac{1}{200}y^2\right)\right]dy$$

$$=\int_{-120}^{120}\left[122-\left(\frac{1}{288}+\frac{1}{200})y^2\right)\right]dy=2\int_{0}^{120}\left[122-\frac{61}{7200}y^2\right]dy$$

$$=2\cdot\left[122\cdot 120-\frac{61}{7200}\cdot\frac{1}{3}\,(120)^3\right]=19520$$



b) Aus Symmetriegründen liegen beide Schwerpunkte auf der x-Achse. Zu bestimmen ist also jeweils nur der x-Wert:

$$F_{West} \cdot x_{West} = -\frac{1}{2} \int_{-120}^{120} x^2 dy = -\frac{1}{2} \int_{-120}^{120} \left(-72 + \frac{1}{200} y^2\right)^2 dy$$

$$= -\int_{0}^{120} \left(-72 + \frac{1}{200} y^2\right)^2 dy = -\int_{0}^{120} \left(72^2 - \frac{144}{200} y^2 + \frac{1}{200^2} y^4\right) dy$$

$$= -\left[72^2 \cdot 120 - \frac{48}{200} \cdot 120^3 + \frac{1}{200^2} \cdot \frac{1}{5} 120^5\right] = -331776$$

$$F_{West} = -\int_{-120}^{120} x dy = -2 \int_{0}^{120} \left(-72 + \frac{1}{200} y^2\right) dy$$

$$= -2 \cdot \left[-72 \cdot 120 + \frac{1}{200} \cdot \frac{1}{3} 120^3\right] = 11520$$

$$x_{West} = \frac{-331776}{11520} = -\frac{144}{5} = -28.8$$

$$F_{Ost} \cdot x_{Ost} = +\frac{1}{2} \int_{-120}^{120} x^2 dy = \frac{1}{2} \int_{-120}^{120} \left(50 - \frac{1}{288} y^2\right)^2 dy$$

$$= \int_{0}^{120} \left(50 - \frac{1}{288} y^2\right)^2 dy = \int_{0}^{120} \left(50^2 - \frac{100}{288} y^2 + \frac{1}{288^2} y^4\right) dy$$

$$= \left[50^2 \cdot 120 - \frac{100}{3 \cdot 288} \cdot 120^3 + \frac{1}{288^2} \cdot \frac{1}{5} 120^5\right] = 160000$$

$$F_{Ost} = \int_{-120}^{120} x dy = 2\int_{0}^{120} \left(50 - \frac{1}{288}y^2\right) dy = 2 \cdot \left[50 \cdot 120 - \frac{1}{288} \cdot \frac{1}{3}120^3\right]$$
$$= 8000$$
$$x_{Ost} = \frac{160000}{8000} = 20$$

Das Zentrum von Westlebarapleppod liegt also 28.8 km westlich des Tiel, dasjenige von Ostlebarapleppod 20km östlich des Tiel.

c) Wir berechnen den Schwerpunkt des gesamten Landes aus den Zentren der beiden Teile. (Natürlich hätte auch die Fläche aus den beiden Teilflächen ermittelt werden können. Wir hätten hierzu lediglich voraussehen müssen, dass die Berechnung der beiden Zentren ohnehin die Berechnung der Teilflächen erfordert.)

$$F \cdot x_{Ges} = F_{Ost} \cdot x_{Ost} + F_{West} \cdot x_{West} = 160000 - 331776 = -171776$$
$$\Rightarrow \quad x_{Ges} = \frac{-171776}{19520} = -\frac{44}{5} = -8.8$$

Das Stadion muss 8.8km westlich des Tiel errichtet werden.

Aufgabe 4.

a) Wir berechnen den Inhalt in Abhängigkeit der Höhe h:

$$V = \pi \int_0^h \left(3 \cdot \sqrt[5]{x}\right)^2 dx = 9\pi \int_0^h x^{\frac{2}{5}} dx = 9\pi \left[x^{\frac{7}{5}} \cdot \frac{5}{7}\right]_0^h = \frac{45}{7}\pi \cdot h^{\frac{7}{5}}$$

Hieraus kann die zum Fassungsvermögen $0,3l = 0,3dm^3 = 300cm^3$ gehörende Höhe ermittelt werden:

$$300 = \frac{45}{7}\pi \cdot h^{\frac{7}{5}} \qquad \Rightarrow \qquad h = \left(300 \cdot \frac{7}{45} \cdot \frac{1}{\pi}\right)^{\frac{5}{7}} = \left(\frac{140}{3\pi}\right)^{\frac{5}{7}} \approx 6.87$$

b) Zunächst muss ermittelt werden, wie hoch das Glas gefüllt ist
(wir nennen diese Höhe a):

$$250 = \frac{45}{7}\pi \cdot a^{\frac{7}{5}} \qquad \Rightarrow \qquad a = \left(250 \cdot \frac{7}{45} \cdot \frac{1}{\pi}\right)^{\frac{5}{7}} = \left(\frac{350}{9\pi}\right)^{\frac{5}{7}} \approx 6.03$$

Der Schwerpunkt befindet sich auf der x-Achse. Die zugehörige x-Koordinate ist

$$V_a \cdot x_{voll} = \pi \int_0^a x \cdot \left(3 \cdot \sqrt[5]{x}\right)^2 dx = 9\pi \int_0^a x^{\frac{7}{5}} dx = 9\pi \cdot \left[x^{\frac{12}{5}} \cdot \frac{5}{12}\right]_0^a = \frac{15}{4}\pi \cdot a^{\frac{12}{5}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{voll} = \frac{\frac{15}{4}\pi \cdot a^{\frac{12}{5}}}{\frac{45}{7}\pi \cdot a^{\frac{7}{5}}} = \frac{7}{12}a = \frac{7}{12} \cdot \left(\frac{350}{9\pi}\right)^{\frac{5}{7}} \approx 3.52$$