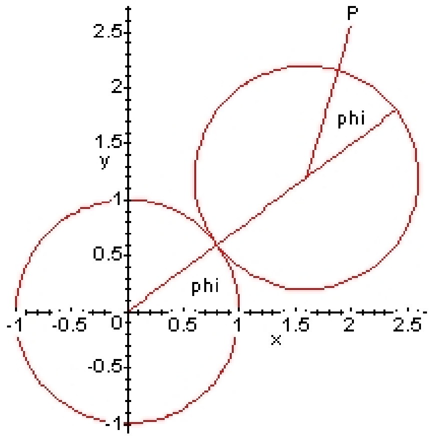
Thema: Ebene Kurven

Aufgabe 1. Auf einer Kreisscheibe K_1 mit Radius 1 rolle eine zweite Kreisscheibe K_2 mit Radius 1 ab. Ein Punkt P ist im Abstand a vom Mittelpunkt der Scheibe K_2 angebracht und fest mit der Scheibe verbunden.



a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Bahnkurve K des Punktes in Abhängigkeit des Parameters a an.

b) Für welche a ist die Kurve glatt?

c) Skizzieren Sie die Kurve K für $a = 0$, $a = \frac{1}{4}$, $a = \frac{3}{4}$, $a = 1$ und $a = 2$.

d) Für welche Werte von a ist die Kurve doppelpunktfrei? Eine Begründung ist nicht verlangt.

Aufgabe 2. Gegeben ist die Kurve K mit der Parameterdarstellung:

$$x = t^2 - 1 \qquad -\infty < t < +\infty$$
$$y = t^3 - t$$

a) Untersuchen Sie die Kurve auf Symmetrie und bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen. Ermitteln Sie alle Hoch-, Tief-, Links-, Rechts- und Wendepunkte.

b) Zeigen Sie, dass in dem Punkt, in dem sich die Kurve selbst schneidet, die Tangenten aufeinander senkrecht stehen. Bestimmen Sie die beiden Schmiegkreise in diesem Punkt.

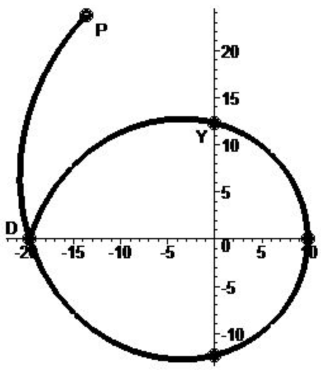
c) Zeichnen Sie die Kurve im Bereich $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ mit der Längeneinheit 2cm. Berechnen Sie den Inhalt der von der Kurve umschlossenen Fläche.

Aufgabe 3. Welche Fläche wird von den beiden Kurven $y = \sin x$ und $y = \cos x$ zwischen $x = 0$ und $x = 2\pi$ eingeschlossen?

Aufgabe 4. WS 14/15 (30 Punkte). Die nachstehend skizzierte Kurve K kann in Polarkoordinaten beschrieben werden durch

$$r \;=\; r(\varphi) \;=\; \varphi^2 + \pi^2 \;, \quad \varphi \in [-\frac{4}{3}\pi, \pi]$$

a) Zum Winkel $\varphi = -\frac{4\pi}{3}$ gehört der markierte Kurvenpunkt P. Geben Sie für P die Polarkoordinaten (r_P, φ_P) und die kartesischen Koordinaten (x_P, y_P) an.



b) Zeigen Sie, dass die Kurve glatt ist. Geben Sie für K eine zulässige Parameterdarstellung mit P als Anfangspunkt an und eine zweite mit P als Endpunkt.

c) Bestimmen Sie im Schnittpunkt Y mit der positiven y-Achse die Tangente in der Form $y = mx + b$.

d) Zeigen Sie, dass die Kurve K genau einen Doppelpunkt D besitzt. Berechnen Sie den Inhalt F der von der Kurve K vollständig eingeschlossenen Fläche.

e) Geben Sie eine geschlossene Teilkurve K_g von K in Polarkoordinaten an. Ist diese Kurve glatt? Ist sie doppelpunktfrei?