Aufgabe 1.
a) Wir ermitteln zunächst die Parameterdarstellung in der Gaußschen Zahlenebene. (Der Mittelpunkt der zweiten Kreisscheibe bewegt sich auf einem Kreis mit Radius 2 um den Ursprung.)

$$z = 2e^{i\varphi} + a \cdot e^{2i\varphi} \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Daraus ergibt sich die reelle Darstellung:

$$x = Re(z) = 2\cos\varphi + a \cdot \cos 2\varphi$$

$$y = Im(z) = 2\sin\varphi + a \cdot \sin 2\varphi \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

(Bei der Kurve handelt es sich um die Pascalsche Schnecke. Als Spezialfall erhält man für $a = 1$ die Kardioide.)

b) Wir prüfen zunächst, ob die Parameterdarstellung zulässig ist. Hierzu ermitteln wir diejenigen Stellen, an denen die Geschwindigkeit verschwindet:

$$0 = x' = -2\sin\varphi - 2a \cdot \sin 2\varphi = -2\sin\varphi - 4a \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$= -2\sin\varphi \cdot (1 + 2a \cdot \cos\varphi) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad 2a \cdot \cos\varphi = -1$$

$$0 = y' = 2\cos\varphi + 2a \cdot \cos 2\varphi = 2\cos\varphi + 2a \cdot \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

$$= 2\cos\varphi + 2a \cdot \left(2\cos^2\varphi - 1\right)$$

Die erste Bedingung konnte in zwei Fälle zerlegt werden. Wir setzen beide in die zweite Gleichung ein:

1. $\sin\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad y' = 2\cos\varphi + 2a$

   $1a. \quad \cos\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = y' = 2 + 2a \quad \Rightarrow \quad$ unmöglich (wegen $a > 0$)

   $1b. \quad \cos\varphi = -1 \quad \Rightarrow \quad 0 = y' = -2 + 2a \quad \Rightarrow \quad a = 1$

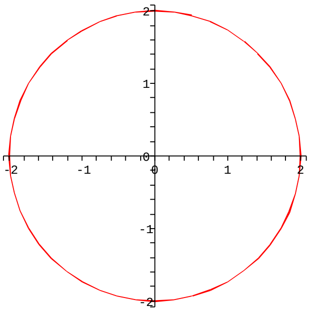
2. $2a \cdot \cos\varphi = -1 \quad \Rightarrow \quad 0 = y' = 2\cos\varphi + 2\cos\varphi \cdot 2a\cos\varphi - 2a = -2a$

   $\Rightarrow$ unmöglich

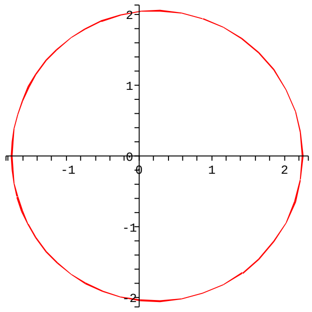
Die Parameterdarstellung ist also für alle $a \neq 1$ zulässig. Die zugehörigen Kurven sind also glatt. Für $a = 1$ handelt es sich um die Kardioide. Diese hat einen Knick (bei $\varphi = \pi$), ist also nicht glatt.

c)

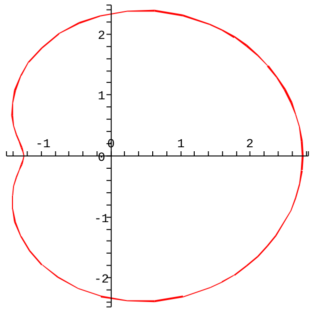
a=0



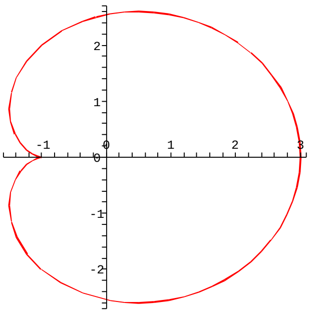
a=$\frac{1}{4}$



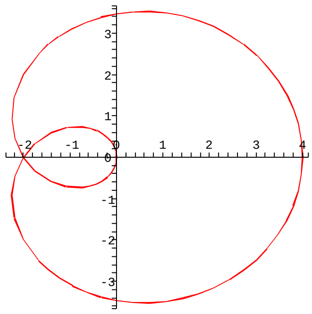
a=$\frac{3}{4}$



a=1



a=2



d) Die Kurve ist doppelpunktfrei für $a \leq 1$.

Aufgabe 2.
a) Symmetrie-Untersuchung:

$$x(-t) = (-t)^2 - 1 = t^2 - 1 = x(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) \text{ ist eine gerade Funktion}$$

$$y(-t) = (-t)^3 - (-t) = -(t^3 - t) = -y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) \text{ ist eine ungerade Funktion}$$

Die Kurve ist also symmetrisch zur x-Achse.
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm 1$$

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^3 - t = t(t^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \text{oder} \quad t = \pm 1$$

Für $t = \pm 1$ schneidet die Kurve beide Achsen, die kurve läuft dort also durch den Koordinatenursprung O(0,0).
In $t = 0$ schneidet die Kurve die x-Achse im Punkt N(-1,0).
Hoch-und Tiefpunkte:

$$\dot{y} = 3t^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3} \qquad\qquad \ddot{y} = 6t \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \pm 2\sqrt{3}$$

$$x(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \qquad y(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot(-\frac{2}{3}) = \mp\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

Die Kurve hat je einen Hochpunkt (H) und Tiefpunkt (T):

$$H(-\frac{2}{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}) \quad T(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}\sqrt{3})$$

Links- und Rechtspunkte:

$$\dot{x} = 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \qquad \ddot{x} = 2$$

Die Kurve hat keinen Rechtspunkt und genau einen Linkspunkt, nämlich den Punkt N(-1,0).
Wendepunkte:

$$\dot{x}\cdot\ddot{y} - \ddot{x}\cdot\dot{y} = (2t)\cdot(6t) - (2)\cdot(3t^2-1) = 12t^2 - 6^2 + 2 = 6t^2 + 2$$

Dieser Ausdruck ist offenbar stets echt positiv. Die Kurve hat also keine Wendepunkte.

b) Die Kurve hat genau eine Selbstdurchdringung, nämlich im Punkte O(0,0). Die zugehörigen Paramterwerte sind $t_1 = -1, t_2 = +1$. (Begründung: Es ist $x(t_1) = x(t_2)$ mit $t_1 < t_2$. Die Funktion $x(t)$ ist im Bereich $t > 0$ streng monoton wachsend und im Bereich $t < 0$ streng monoton fallend. Deshalb muss einer der beiden Paramterwerte negativ und der andere positiv sein, also $t_1 < 0 < t_2$. Da $x(t)$ gerade ist, gitl zudem $x(-t_1) = x(-t_2)$. Hieraus ergibt sich $-t_1 = t_2$. An einer Selbstdruchdringung müssen auch noch die y-Werte gleich sein. Da y(t) ungerade ist, gilt:

$$y(t_1) = y(t_2) = y(-t_1) = -y(t_1) = \quad \Rightarrow \quad y(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -1$$

Wir berechnen die Steigungen:

$$\dot{x}(-1) = -2, \quad \dot{y}(-1) = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Steigung} = -1$$

$$\dot{x}(+1) = +2, \quad \dot{y}(+1) = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Steigung} = +1$$

Das Produkt der beiden Steigungen ist -1, dass heisst die Tangenten stehen senkrecht aufeinander. Wir berechnen die Krümmung:

$$\kappa = \frac{\dot{x}\cdot\ddot{y} - \ddot{x}\cdot\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6t^2+2}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \kappa(\pm 1) = \frac{8}{(4+4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

Wir bestimmen die zugehörigen Krümmungskreise. Aufgrund der Symmetrie genügt es, einen der beiden Kreise zu ermitteln. Wir wählen $t = +1$. Den Kreis-Radius nennen wir r, seinen Mittelpunkt M.

$$\text{Tangenteneinheitsvektor} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1,1) \quad \Rightarrow \quad \text{Normaleneinheitsvektor} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1,1)$$

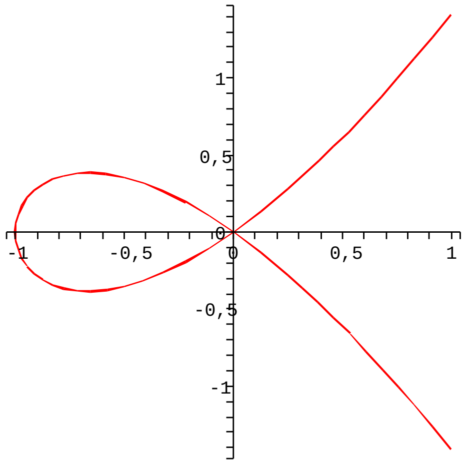
$$M = O + \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1,1) = \sqrt{8}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1,1) = (-2,2) \quad r = \frac{1}{|\kappa(1)|} = \sqrt{8}$$

Hieraus können wir die Gleichung der beiden Schmiegkreise ablesen:

$$t = +1: \quad (x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

$$t = -1: \quad (x+2)^2 + (y+2)^2 = 8$$

c)



Für den Inhalt A der von der Kurve umschlossenen Fläche gilt:

$$A = -\int_{-1}^{1} y\dot{x}dt = \int_{-1}^{1} (t^3 - t)\cdot(2t)dt = -2\int_{-1}^{1}(t^4 - t^2)dt = -2\cdot[\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3]_{-1}^{+1}$$

$$= -4\cdot(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}) = \frac{8}{15}$$

Aufgabe 3. Zunächst bestimmen wir die Schnittpunkte der beiden Kurven:

$$\sin x = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{oder} \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

Das Intervall $[0, 2\pi]$ wird durch die beiden Schnittpunkte in drei Teile zerlegt. Wir berechnen die zu diesen Teilen gehörenden Integrale getrennt:

$$\int (\sin x - \cos x)\,dx = -\cos x - \sin x + C \quad \Rightarrow$$

$$l_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx = [-\cos x - \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right] - [-1 - 0]$$

$$= 1 - \sqrt{2}$$

$$l_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \left[\sqrt{2}\right] - \left[-\sqrt{2}\right] = 2\sqrt{2}$$

$$l_3 = \int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\sin x - \cos x)\, dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} = [-1] - \left[\sqrt{2}\right] = -1 - \sqrt{2}$$

Für die Gesamtfläche A ergibt sich

$$A = |l_1| + |l_2| + |l_3| = \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(2\sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}$$

Durch eine Symmetrieüberlegung kommt man schneller zum Ziel:

$$A = 2 \cdot \left| \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, dx \right| = 2 \cdot \left| [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \right| = 2 \cdot \left| \sqrt{2} + \sqrt{2} \right| = 4\sqrt{2}$$

Aufgabe 4.

a) Für Polarkoordinaten (r, φ) muss $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ sein. Deshalb ist

$$r_P = r(-\frac{4\pi}{3}) = \frac{16\pi^2}{9} + 9\pi^2 = \frac{25\pi^2}{9} \text{ und } \varphi_P = -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

Die kartesischen Koordinaten (x_P, y_P) von P ergeben sich zu

$$x_P = r \cdot \cos\varphi = \frac{25\pi^2}{9} \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{25\pi^2}{9} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -\frac{25\pi^2}{18}$$

$$y_P = r \cdot \sin\varphi = \frac{25\pi^2}{9} \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{25\pi^2}{9} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{25\pi^2}{18}\sqrt{3}$$

b) Die Kurve ist glatt, da die Geschwindigkeit $\underline{\dot{x}} := \frac{dx}{d\varphi}$ nirgends Null wird. Für das Geschwindigkeitsquadrat ergibt sich nämlich

$$\underline{\dot{x}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \geq 0 + (\pi^2)^2 > 0$$

Eine zulässsige Parameterdarstellung mit P als Anfangspunkt ist

$$x = x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos\varphi = (\varphi^2 + \pi^2) \cdot \cos\varphi,$$

$$y = y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin\varphi = (\varphi^2 + \pi^2) \cdot \sin\varphi; \quad \varphi \in [-\frac{4}{3}\pi, \pi]$$

Durch die Transformation $t = -\varphi$ erhält man daraus eine zulässsige Parameterdarstellung mit P als Endpunkt:

$$x = x(t) = (t^2 + \pi^2) \cdot \cos t,\ y = y(t) = -(t^2 + \pi^2) \cdot \sin t; \quad t \in [-\pi, \frac{4}{3}\pi]$$

c) Im Punkt Y ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also $r = r(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} + \pi^2 = \frac{5\pi^2}{4}$. Es ist $\dot{r} = 2\varphi$, also $\dot{r}(\frac{\pi}{2}) = \pi$. Die Tangente in Y hat die Steigung

$$m_Y = \frac{dy}{dx} = \frac{dr}{-r \cdot d\varphi} = -\pi \cdot \frac{4}{5\pi^2} = -\frac{4}{5\pi}$$

Die Gleichung der Tangente in Y ist damit

$$y = -\frac{4}{5\pi}x + \frac{5\pi^2}{4}$$

d) Der Doppelpunkt D muss für zwei Winkel φ_{D1} und $\varphi_{D2} = \varphi_{D1} + 2\pi$ erreicht werden. Der Radius hat dort den gleichen Wert:

$$r(\varphi_{D1}) \stackrel{!}{=} r(\varphi_{D1} + 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_{D1}^2 = (\varphi_{D1} + 2\pi)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi_{D1}^2 = \varphi_{D1}^2 + 4\pi\varphi_{D1} + 4\pi^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 4\pi\varphi_{D1} + 4\pi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_{D1} = -\pi$$

Es gibt demnach genau einen Doppelpunkt D und dieser entsteht für $\varphi_{D1} = -\pi$ und $\varphi_{D2} = +\pi$. Für die umschlossene Fläche F gilt

$$F = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_{D1}}^{\varphi_{D2}} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\varphi^2 + \pi^2)^2\, d\varphi = \int\limits_{0}^{\pi} (\varphi^4 + 2\pi^2\varphi^2 + \pi^4)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{5}\pi^5 + 2\pi^2 \cdot \frac{1}{3}\pi^3 + \pi^5 = \pi^5(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1) = \frac{28}{15}\pi^5$$

e) Der Kurventeil zwischen φ_{D1} und φ_{D2} ist geschlossen:

$$K_g: \quad r = r(\varphi) = \varphi^2 + \pi^2\ ; \qquad \varphi \in [-\pi, \pi]$$

K_g ist doppelpunktfrei, da es außer Anfangs- und Endpunkt von K_g keine Doppelpunkte gibt. Die Kurve K_g ist aber nicht glatt, da die Tangenten in Anfangs- und Endpunkt nicht übereinstimmen. Die Steigung m_{D1} beim Winkel φ_{D1} ist

$$m_{D1} = \frac{dy}{dx} = \frac{-r \cdot d\varphi}{-dr} = \frac{r}{\dot{r}} = \frac{2\pi^2}{-2\pi} = -\pi$$

Bei φ_{D2} ist aus Symmetriegründen $m_{D2} = -m_{D1} = \pi \neq m_{D1}$.