Aufgabe 1. Es ist

$$\dot{x} = 3t^2, \quad \dot{y} = 2t \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^4} = |t| \cdot \sqrt{9t^2 + 4}$$

Für die Länge der Kurve gilt daher

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\; dt = \int_{-1}^{1} |t| \cdot \sqrt{9t^2 + 4}\; dt = 2 \cdot \int_{0}^{1} t \cdot \sqrt{9t^2 + 4}\; dt =$$

$$= \boxed{\begin{array}{c|c} u = 9t^2 + 4 & t = 1 \Rightarrow u = 13 \\ \hline du = 18t\; dt & t = 0 \Rightarrow u = 4 \end{array}} = \frac{2}{18} \cdot \int_{4}^{13} \sqrt{u} du = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_4^{13} =$$

$$= \frac{2}{27}(13\sqrt{13} - 8) \approx 2.88$$

Aufgabe 2. Für die Länge der ersten Kurve gilt

$$y = sinx \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x \quad \Rightarrow \quad L_1 = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\; dx$$

Für die Länge der zweiten Kurve gilt:

$$y = \frac{1}{10} \sin 10x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos 10x \quad \Rightarrow \quad L_2 = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 10x}\; dx =$$

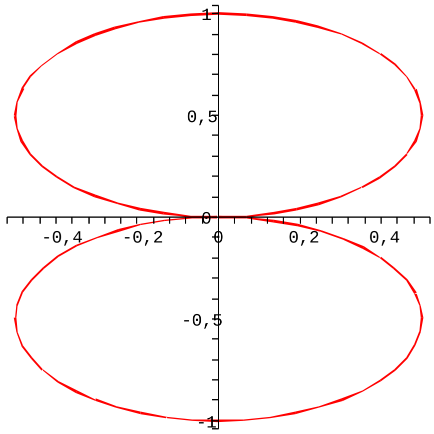
$$= \boxed{\begin{array}{c|c} u = 10x & x = \pi \Rightarrow u = 10\pi \\ \hline du = 10\; dx & x = 0 \Rightarrow u = 0 \end{array}} = \frac{1}{10} \int_0^{10\pi} \sqrt{1 + \cos^2 u}\; du$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 u}\; du = L_1$$

Die beiden Käfer treffen also genau gleichzeitig ein.

Aufgabe 3. Für die Länge der Kurve gilt:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$



Aufgabe 4.

a) Eine Parameterdarstellung $\underline{x}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi))$ der Kurve K ist

$$x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = \varphi \cdot (2-\varphi) \cdot \cos\varphi$$

$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = \varphi \cdot (2-\varphi) \cdot \sin\varphi$$

mit $\varphi \in [0, 2]$. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich der Punkt Y auf der y-Achse:

$$y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \cdot (2 - \frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow \quad Y(0, \pi - \frac{\pi^2}{4})$$

b) Für den am weitesten vom Ursprung entfernten Punkt M gilt $r' = 0$.

$$0 = r' = 2 - 2\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 1$$

Wegen $r'' = -2 < 0$ ist das ein relatives Maximum. Der Abstand bei $\varphi = 1$ ist $r = 1$. An beiden Rändern ($\varphi = 0$, $\varphi = 2$) ist $r = 0$. Es handelt sich also um das absolute Maximum. Der größte Abstand zum Ursprung ist also 1. Der zugehörige Kurvenpunkt ist $M(\cos 1, \sin 1)$.

c) Für das Bogenelement ds gilt

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$$

Zu zeigen ist also, dass

$$r^2 + (r')^2 = ((\varphi - 1)^2 + 1)^2$$

Zunächst wird die linke Seite berechnet:

$$r = \varphi \cdot (2 - \varphi) = 2\varphi - \varphi^2 \quad \Rightarrow \quad r' = 2 - 2\varphi$$

$$r^2 + (r')^2 = 4\varphi^2 - 4\varphi^3 + \varphi^4 + (2 - 2\varphi)^2 = 4 - 8\varphi + 8\varphi^2 - 4\varphi^3 + \varphi^4$$

Und nun die rechte Seite:

$$((\varphi-1)^2+1)^2 = (\varphi-1)^4 + 2(\varphi-1)^2 + 1 =$$

$$= (\varphi^4 - 4\varphi^3 + 6\varphi^2 - 4\varphi + 1) + 2(\varphi^2 - 2\varphi + 1) + 1 = 4 - 8\varphi + 8\varphi^2 - 4\varphi^3 + \varphi^4$$

Tatsächlich ist demnach

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = ((\varphi-1)^2 + 1)\, d\varphi$$

Für die Länge L der Kurve ergibt sich dann

$$L = \int_0^2 \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = \int_0^2 ((\varphi-1)^2+1)\, d\varphi = \int_0^2 (\varphi^2 - 2\varphi + 2)\, d\varphi =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\varphi^3 - \varphi^2 + 2\varphi\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 + 4 = \frac{8}{3}$$

Aufgabe 5.

a) Der Geschwindigkeits-Vektor $\dot{\mathbf{x}}$ lässt sich in die beiden senkrecht aufeinander stehenden Komponenten $\dot{r}$ (zeigt auf den Mittelpunkt) und $r \cdot \dot{\phi}$ zerlegen. Da die vier Mäuse zu jedem Zeitpunkt ein Quadrat bilden, schließen $\dot{\mathbf{x}}$ und die Verbindung mit dem Mittelpunkt stets einen Winkel von 45 Grad ein. Weiter ist bekannt, dass r während der Bewegung abnimmt. Mit der Abkürzung $v = |\dot{\mathbf{x}}|$ gilt:

$$\dot{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot v \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot v \cdot t + C$$

Bezeichnen wir die Seitenlänge des Quadrates mit a, so folgt weiter:

$$r(0) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a = C \quad \Rightarrow \quad r(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (a - v \cdot t)$$

Entsprechendes gilt für die zweite Komponente. Dabei ist zu beachten, dass die Bewegung laut Bild im Uhrzeigersinn erfolgt. Der Winkel muss also auch abnehmen:

$$r \cdot \dot{\phi} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot v \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = -\frac{v}{a - v \cdot t} = \frac{v}{v \cdot t - a} \quad \Rightarrow$$

$$\phi(t) = \ln|v \cdot t - a| + C = \ln(a - v \cdot t) + C$$

Die für die Bahnkurve unerhebliche zeitliche Abhängigkeit kann jetzt eliminiert werden:

$$\phi = \ln(r \cdot \sqrt{2}) + C \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot e^{\phi - C}$$

Die Anfangsbedingung ist je nach Maus unterschiedlich:

$$\text{Maus A:} \quad r(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{3}{4}\pi - C} = a \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{4}\pi - \ln a$$

$$\text{Maus B:} \quad r(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{1}{4}\pi - C} = a \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{4}\pi - \ln a$$

Maus C: $r(-\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{1}{4}\pi - C} = a \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{4}\pi - \ln a$

Maus D: $r(-\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{3}{4}\pi - C} = a \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{3}{4}\pi - \ln a$

Für die Bahnkurve von Maus A erhalten wir:

$$r(\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot e^{\phi - \frac{3}{4}\pi + \ln a} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot e^{\phi - \frac{3}{4}\pi} \cdot e^{\ln a} = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot e^{\phi - \frac{3}{4}\pi} \qquad -\infty < \phi \leq \frac{3}{4}\pi$$

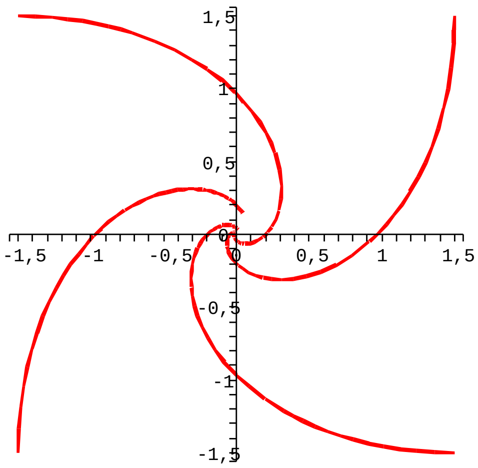
Entsprechend läuft die Berechnung der Bahnkurven der anderen Mäuse. Es ergibt sich:

Maus A: $r(\phi) = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot e^{\phi - \frac{3}{4}\pi} \qquad -\infty < \phi \leq \frac{3}{4}\pi$

Maus B: $r(\phi) = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot e^{\phi - \frac{1}{4}\pi} \qquad -\infty < \phi \leq \frac{1}{4}\pi$

Maus C: $r(\phi) = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot e^{\phi + \frac{1}{4}\pi} \qquad -\infty < \phi \leq -\frac{1}{4}\pi$

Maus D: $r(\phi) = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot e^{\phi + \frac{3}{4}\pi} \qquad -\infty < \phi \leq -\frac{3}{4}\pi$



Zu beachten ist, dass die Kurve in Richtung abnehmender Winkel (Uhrzeigersinn) durchlaufen werden. Die Mäuse umrunden (theoretisch) den Mittelpunkt unendlich oft. Die Kurven sind logarithmische Spiralen.

b) Die Bogenlänge L ist für jede dieser Kurven gleich. Wir berechnen diese Länge über die Kurve A:

$$L = \int_{-\infty}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{r'^2 + r^2}\ d\phi = \int_{-\infty}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{2r^2}\ d\phi = \int_{-\infty}^{\frac{3}{4}\pi} r \cdot \sqrt{2}\ d\phi = a \cdot \int_{-\infty}^{\frac{3}{4}\pi} e^{\phi - \frac{3}{4}\pi}\ d\phi$$

$$= a \cdot \int_{-\infty}^{0} e^u\ du = a \cdot e^u \ |_{-\infty}^{0} = a$$

Die Länge L kann auch schon aus der ganz am Anfang ermittelten Gleichung für $r(t)$ bestimmt werden:

$$r(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (a - v \cdot t)$$

Man erkennt hieraus, dass die Zeit bis zum Treffpunkt ($r = 0$) gleich $\frac{a}{v}$ ist. Wegen der betragsmäßig konstanten Geschwindigkeit ist

$$L = v \cdot \frac{a}{v} = a$$

Zu jedem festgelegten Zeitpunkt bilden die vier Mäuse die Ecken eines Quadrates. Dieses Quadrat schrumpft und dreht sich durch die Bewegung der Mäuse. Der Weg eines Verfolgers ist deshalb zu jeder Zeit senkrecht zum Weg des Verfolgten. Dies zeigt uns, dass die Geschwindigkeit des Verfolgten niemals eine Komponente besitzt, die ihn dem Verfolgten näher bringt oder von ihm entfernt. Folglich wird er vom Verfolger in der gleichen Zeit eingeholt, wie wenn sich der Verfolgte nicht rührt. Bis zum Treffpunkt legen die Tiere also drei Meter zurück.

Aufgabe 6. Wir betrachten eine Kette mit n Münzen. Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Münzen in der Kette, so entsteht ein n-Eck P. Die Winkelsumme (der Innenwinkel α_i) beträgt bekanntlich unabhängig von der Form der Kette

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2) \cdot \pi$$

Die Summe der Außenwinkel β_i ist demnach

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} (2\pi - \alpha_i) = 2n \cdot \pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2n \cdot \pi - (n-2) \cdot \pi = (n+2) \cdot \pi$$

Die äußere Münze rollt aber nicht den ganzen Außenwinkel β_i auf der i-ten Münze ab. Vielmehr bildet die Verbindung der zwei Mittelpunkte am Anfang und am Ende des Abrollens einen Winkel von 60 Grad mit dem Polygon P. Der Teil des Umfangs der i-ten Münze, welchen die umlaufende Münze berührt, entspricht also dem Winkel $\gamma_i = \beta_i - 2 \cdot \frac{\pi}{3}$. Insgesamt ergibt das

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - 2 \cdot \frac{\pi}{3}) = (n+2) \cdot \pi - 2n \cdot \frac{\pi}{3} = (\frac{n}{3} + 2) \cdot \pi$$

Beim Abrollen dreht sich die umlaufende Münze aber jeweils um den doppelten Winkel. Insgesamt sind es also $2 + \frac{n}{3}$ volle Umdrehungen. Bei neun Münzen macht die umlaufende Münze also genau 5 vollständige Umdrehungen.