**Thema: Funktionen mehrerer Veränderlicher**

**Aufgabe 1. SS 06, Analysis 2** (ohne Hilfsmittel)

Gegeben ist eine ebene Kurve mit der impliziten Darstellung

$$e^{xy} - y = 0$$

Bestimmen Sie im Kurvenpunkt $P_0$ mit $x = 0$ die Gleichung der Kurventangente.

**Aufgabe 2. SS 05, Höhere Mathematik 2** (ohne Hilfsmittel)

a) Gegeben ist die Funktion

$$z = f(x, y) = x^3y^2 + \frac{y}{x}$$

Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $(x, y) = (1, 2)$?

b) Gegeben ist $y(x)$ implizit durch

$$x^2y^2 + 3xy = 4$$

Berechnen Sie $y'$ im Punkt $(1, 1)$.

c) Gegeben ist die Funktion

$$f(u, v) = 5u + v^2$$

mit $u(x, y) = y^2 \cdot \sin x$ und $v(x, y) = 3e^y \cdot x^2$. Berechnen Sie $df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$.

d) Gegeben ist das vollständige Differential

$$df = (2x \cdot \sin^2 y - y \cdot \sin x)dx \quad + \quad (\cos x + 2x^2 \cdot \sin y \cdot \cos y)dy$$

Berechnen Sie $f(x, y)$.

**Aufgabe 3. SS 07, Analysis 2**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy - y^3$$

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von $f$ und untersuchen Sie, ob dort Extremwerte vorliegen.

b) Entwickeln Sie $f$ in eine Taylor-Reihe um $(0, 1)$ bis zu den Gliedern zweiter Ordnung.

c) Die Gleichung $f(x, y) = 0$ definiert implizit eine Kurve im $\mathbb{R}^2$. In welchen der drei Kurvenpunkte $(0, 0), (1, 2)$ und $(1, -1)$ kann die Gleichung $f(x, y) = 0$ lokal eindeutig nach $y$ aufgelöst werden? Geben Sie in den Punkten, wo dies möglich ist die Kurventangente an.

**Aufgabe 4.** Vorgelegt ist die Funktion

$$f(x, y) = (x^2 + 4y^2 - 5)(x - 1)$$

a) Wo gilt $f(x, y) = 0$, wo $f(x, y) > 0$ und wo $f(x, y) < 0$?

b) Bestimmen Sie alle Maxima, Minima und Sattelpunkte von $f(x, y)$.

c) Geben Sie die Tangentialebenen in den Punkten $(0, 0, f(0, 0))$ und $(1, 1, f(1, 1))$ an.

**Aufgabe 5.** Für $-5 < x < 5$ sei

$$f(x, y) = y\sqrt{25 - x^2}$$

a) Berechnen Sie den Gradienten von $f(x, y)$.

b) In welcher Richtung ist die Steigung in $P(4, -3)$ am größten? In welcher Richtung ist sie am kleinsten? Geben Sie die zugehörigen Richtungsableitungen an.

c) Berechnen Sie die Tangentialebene und die Flächennormale im Punkt $P$.

**Aufgabe 6.** Bestimmen Sie für nachstehende Funktion $f(x, y)$ die Taylorreihe um $(1, 2)$.

a) $f(x, y) = x^3 + xy^2$

b) $f(x, y) = x \cdot e^y$