Aufgabe 1. Durch implizites Differenzieren ergibt sich

$$0 = \frac{d}{dx}(e^{xy} - y) = e^{xy} \cdot (y + xy') - y'$$

An der Stelle $x_0 = 0$ ist

$$e^{0 \cdot y} - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(0) = 1$$

$$e^{0 \cdot y} \cdot (y + 0 \cdot y') - y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = y(0) = 1$$

Die Kurventangente ist also

$$y = y'(0) \cdot x + y(0) = x + 1$$

Aufgabe 2.
a) Die partiellen Ableitungen sind

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2 + \frac{y}{x}) = 3x^2y^2 - \frac{y}{x^2}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2 + \frac{y}{x}) = 2x^3y + \frac{1}{x}$$

An der Stelle $(1, 2)$ ist

$$z = 4 + 2 = 6 \qquad z_x = 12 - 2 = 10 \qquad z_y = 4 + 1 = 5$$

Die Tangentialebene hat die Gleichung

$$z = 10(x - 1) + 5(y - 2) + 6 = 10x + 5y - 14$$

b) Durch implizites Differenzieren ergibt sich

$$0 = \frac{d}{dx}(x^2y^2 + 3xy) = 2xy^2 + 2x^2yy' + 3y + 3xy'$$

Im Punkt $(1, 1)$ ist

$$0 = 2 + 2y' + 3 + 3y' = 5 + 5y' \quad \Rightarrow \quad y' = -1$$

c) Die partiellen Ableitungen von $f(u, v) = 5u + v^2$ sind

$$f_u = 5 \ , \qquad f_v = 2v$$

Die partiellen Ableitungen von $u(x, y) = y^2 \cdot \sin x$ und $v(x, y) = 3e^y \cdot x^2$ sind

$$u_x = y^2 \cos x \ , \qquad u_y = 2y \sin x$$

$$v_x = 6xe^y \ , \qquad v_y = 3e^y x^2$$

Zusammengesetzt ist

$$f_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x = 5 \cdot y^2 \cos x + 2v \cdot 6xe^y = 5y^2 \cos x + 6e^y x^2 \cdot 6xe^y =$$

$$= 5y^2 \cos x + 36e^{2y} x^3$$

$$f_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y = 5 \cdot 2y \sin x + 2v \cdot 3e^y x^2 = 10y \sin x + 6e^y x^2 \cdot 3e^y x^2 =$$

$$= 10y \sin x + 18e^{2y} x^4$$

$$df = (5y^2 \cos x + 36e^{2y} x^3)dx + (10y \sin x + 18e^{2y} x^4)dy$$

d) Aus $df = (2x \cdot \sin^2 y - y \cdot \sin x)dx + (\cos x + 2x^2 \cdot \sin y \cdot \cos y)dy$ liest man ab:

$$f_x = 2x \cdot \sin^2 y - y \cdot \sin x$$

$$f_y = \cos x + 2x^2 \cdot \sin y \cdot \cos y$$

Durch Integrieren von f_x nach x ergibt sich

$$f(x, y) = x^2 \sin^2 y + y \cos x + g(y)$$

Ableiten nach y liefert

$$f_y = 2x^2 \sin y \cos y + \cos x + g'(y)$$

Der Vergleich mit der Vorgabe ergibt $g'(y) = 0$, also $g(y) = C$.

$$f(x, y) = x^2 \sin^2 y + y \cos x + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 3.
a) Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + 3xy - y^3) = 4x + 3y$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + 3xy - y^3) = 3x - 3y^2$$

In stationären Punkten verschwinden beide partiellen Ableitungen

$$4x + 3y = 0 \ , \qquad x - y^2 = 0$$

Daraus ergibt sich

$$0 = 4y^2 + 3y = y(4y + 3) \qquad \Rightarrow \qquad y = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{3}{4}$$

Es gibt also zwei stationäre Punkte, $S_1(0, 0)$ und $S_2(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4})$. Die Untersuchung auf Extremwerte geschieht mit den höheren Ableitungen und der daraus gebildeten Hesse-Determinante $det(H_f)$

$$f_{xx} = 4 \ , \quad f_{yy} = -6y \ , \quad f_{xy} = 3$$

$$det(H_f) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = -24y - 9$$

Im Punkt $S_1(0,0)$ ist $det(H_f) = -9 < 0$. Es liegt also kein Extremum vor, sondern ein Sattelpunkt. Im Punkt $S_2(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4})$ ist $det(H_f) = 18 - 9 = 9 > 0$. Es handelt sich also um ein Extremum, und zwar - wegen $f_{xx} = 4 > 0$ - um ein relatives Minimum.

b) Es werden die Ableitungen bis zur Ordnung 2 an der Stelle $(0,1)$ benötigt

$$f(0,1) = -1 \ , \quad f_x(0,1) = 3 \ , \quad f_y(0,1) = -3 \ ,$$

$$f_{xx}(0,1) = 4 \ , \quad f_{xy}(0,1) = 3 \ , \quad f_{yy}(0,1) = -6$$

Damit ist

$$f(x,y) = -1 + 3x - 3(y-1) + 2x^2 + 3x(y-1) - 3(y-1)^2 \dots$$

c) Die Gleichung $f(x,y) = 0$ ist auflösbar wo $f_y \neq 0$ gilt.

$$f_y(0,0) = 0 \ , \quad f_y(1,2) = -9 \ , \quad f_y(1,-1) = 0$$

Im Punkt $(1,2)$ ist eine eindeutige Auflösung nach y möglich. Für die Ableitung y' gilt

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{10}{-9} = \frac{10}{9}$$

Die Tangente hat also die Gleichung

$$y = \frac{10}{9}(x-1) + 2 = \frac{10}{9}x + \frac{8}{9}$$

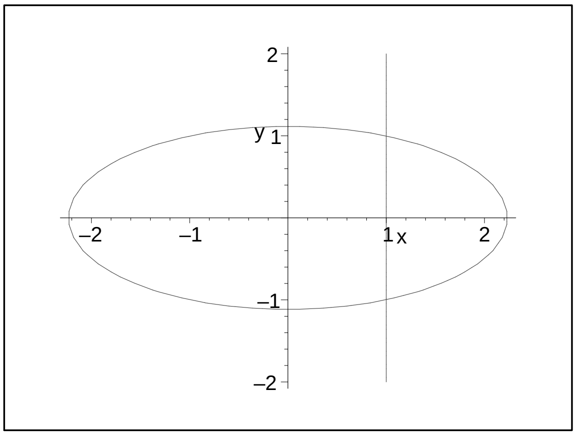
In den anderen Punkten ist eine Auflösung (durch den Satz über implizite Funktionen) nicht garantiert. Es wären tiefer gehende Untersuchungen nötig, um eine Entscheidung zu treffen.

Aufgabe 4.

a) Die Funktion $f(x,y) = (x^2 + 4y^2 - 5)(x-1)$ ist offenbar 0, wo $x^2 + 4y^2 = 5$ ist oder $x = 1$. Ersteres stellt eine Ellipse um den Ursprung dar. Aus der Darstellung

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$$

kann abgelesen werden, dass die Halbachsen $\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ sind. Durch die Ellipse und die Gerade $x = 1$ wird die Ebene in 4 Teile zerlegt.



Da f stetig ist, zusammenhängende Mengen beim Abbilden also zusammenhängend bleiben, hat f in jedem Teil einheitliches Vorzeichen. Wegen

$$f(0,0) = (-5) \cdot (-1) > 0 \ , \quad f(2,0) = (-1) \cdot 1 < 0 \ ,$$

$$f(-3,0) = 4 \cdot (-4) < 0 \ , \quad f(3,0) = 4 \cdot 2 > 0$$

gilt $f(x,y) > 0$ im rechten äußeren und linken inneren Teil. Im linken äußeren und im rechten inneren Teil ist $f(x,y) < 0$.
b) Es ist

$$f(x,y) = x^3 + 4xy^2 - 5x - x^2 - 4y^2 + 5$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x = 3x^2 + 4y^2 - 5 - 2x \ , \quad f_y = 8xy - 8y = 8y(x-1)$$

In stationären Punkten verschwinden diese Ableitungen. Aus $f_y = 0$ ergibt sich $x = 1$ oder $y = 0$. In $f_x = 0$ eingesetzt ergibt sich im ersten Falle $0 = 3+4y^2-5-2 = 4y^2-4 = 4(y^2-1)$, im zweiten Falle $0 = 3x^2-5-2x = 3x^2-2x-5$. Die stationären Punkte sind

$$(1,-1) \ , \quad (1,1) \ ,$$

$$\left(\frac{2-\sqrt{4+60}}{6}, 0\right) = (-1,0) \ ,$$

$$\left(\frac{2+\sqrt{4+60}}{6}, 0\right) = \left(\frac{5}{3}, 0\right)$$

Die Entscheidung erfolgt mit den Ableitungen zweiter Ordnung und der daraus gebildeten Hesse-Determinante $det(H_f)$

$$f_{xx} = 6x - 2 \ , \quad f_{yy} = 8(x-1) \ , \quad f_{xy} = 8y$$

$$det(H_f) = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$det(H_f)(1, \pm 1) = (4) \cdot 0 - 64 < 0 \ ,$$

$$det(H_f)(-1,0) = (-8) \cdot 8(-2) - 0 > 0 \ ,$$

$$det(H_f)(\frac{5}{3},0) = (10-2)\cdot 8(\frac{5}{3}-1) - 0 > 0$$

Ein Extremum liegt demnach bei $(-1,0)$ vor und zwar wegen $f_{xx} = 6x - 2 = -8 < 0$ ein Maximum. Auch bei $(\frac{5}{3},0)$ ist ein Extremum und zwar wegen $f_{xx} = 6x - 2 = 8 > 0$ ein Minimum. Die beiden anderen Stellen sind Sattelpunkte.

$$H(-1,0,8)\ ,\quad S_1(1,-1,0)\ ,\quad S_2(1,1,0)\ ,\quad T(\frac{5}{3},0,-\frac{40}{27})$$

c) Es ist

$$f(0,0) = 5\ ,\quad f(1,1) = 0$$

$$f_x(0,0) = -5\ ,\quad f_x(1,1) = 0$$

$$f_y(0,0) = 0\ ,\quad f_y(1,1) = 0$$

Die Tangentialebene in $(0,0)$ ist daher $z = 5 - 5x$, die in $(1,1)$ ist $z = 0$.

Aufgabe 5.

a) Die partiellen Ableitungen von $f(x,y) = y\sqrt{25-x^2}$ sind

$$z_x = \frac{-2yx}{2\sqrt{25-x^2}} = -\frac{yx}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$z_y = \sqrt{25-x^2}$$

Der Gradient ist

$$\nabla f = \left(-\frac{yx}{\sqrt{25-x^2}}\ ,\ \sqrt{25-x^2}\right)$$

b) In Richtung des Gradienten ist die Steigung am größten, in Gegenrichtung am kleinsten

$$\nabla f(4,-3) = (4,3)$$

In der Richtung $(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ ist die Steigung am größten, in Richung $(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$ am kleinsten. Die Richtungsableitung berechnet sich als Skalarprodukt des Richtungsvektors mit dem Gradienten. In Richtung des Gradienten ist die Richtungsableitung demnach der Betrag des Gradienten, also 5. In Gegenrichtung ist die Richtungslableitung dann -5.

c) Die Tangentialebene hat die Gleichung

$$z = f(4,-3) + f_x(4,-3)\cdot(x-4) + f_y(4,-3)\cdot(y+3) = -9 + 4(x-4) + 3(y+3) =$$

$$= 4x + 3y - 16$$

Dies kann auch geschrieben werden als

$$4x + 3y - z = 16$$

Daraus ist der (unnormierte) Normalenvektor erkennbar: $(-4, -3, 1)$ (oder $(4, 3, -1)$). (Es ist üblich, aber nicht zwingend, im Zweifel den nach oben gerichteten Vektor zu nehmen.) Sein Betrag ist $\sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$. Der Normalenvektor ist also

$$\underline{n} = \frac{1}{26}\sqrt{26}(-4, -3, 1)$$

Aufgabe 6.
a) Es ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= x^3 + xy^2 = ((x-1)+1)^3 + ((x-1)+1)((y-2)+2)^2 = \\
&= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 + ((x-1)+1)((y-2)^2 + 4(y-2) + 4) = \\
&= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 + \\
&\quad + (x-1)(y-2)^2 + 4(x-1)(y-2) + 4(x-1) + (y-2)^2 + 4(y-2) + 4 = \\
&= 5 + 7(x-1) + 4(y-2) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2) + (y-2)^2 + \\
&\quad + (x-1)^3 + (x-1)(y-2)^2
\end{aligned}$$

b) Es ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= x \cdot e^y = ((x-1)+1)e^{(y-2)+2} = e^2((x-1)+1)e^{y-2} = \\
&= e^2((x-1)+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-2)^n}{n!} = \\
&= e^2((x-1)+1)(1 + (y-2) + \frac{1}{2!}(y-2)^2 + \frac{1}{3!}(y-2)^3 + \frac{1}{4!}(y-2)^4 + \ldots) = \\
&= e^2 + e^2(x-1) + e^2(y-2) + e^2(x-1)(y-2) + \frac{e^2}{2!}(y-2)^2 + \\
&\quad + \frac{e^2}{2!}(x-1)(y-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(y-2)^3 + \frac{e^2}{3!}(x-1)(y-2)^3 + \ldots
\end{aligned}$$