Aufgabe 1.
a) Die Ungleichung ist einfach und wird am besten direkt gelöst:

$$7 - x > x - 7 \quad \Leftrightarrow \quad 14 > 2x \quad \Leftrightarrow \quad x < 7$$

Die Lösungsmenge ist das offene Intervall $(-\infty, 7)$.

b) Die Ungleichung ist für $x = 7$ nicht definiert. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, wird zunächst die zugehörige Gleichung gelöst:

$$7 - x = \frac{1}{x-7} \quad \Big| \cdot (x-7) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(x-7)^2 = 1$$

Diese Gleichung ist unlösbar, da die linke Seite ≤ 0 und die rechte Seite > 0 ist. (Zu dieser Erkenntnis gelangt man natürlich auch, wenn man die quadratische Gleichung mit der Mitternachtsformel löst.) Ein Wechsel des Verhaltens der Ungleichung ist demnach nur bei $x = 7$ möglich:

- Für $x = 0 < 7$ ist die linke Seite gleich 7, die rechte gleich $-\frac{1}{7}$. Für $x < 7$ ist die Ungleichung also nicht erfüllt.
- Für $x = 8 > 7$ ist die linke Seite gleich -1, die rechte gleich $+1$. Für $x > 7$ ist die Ungleichung also erfüllt.

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist folglich das offene Intervall $(7, \infty)$.

c) Die Ungleichung ist für $x \in \{1, 7\}$ nicht definiert. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, wird zunächst wieder die zugehörige Gleichung gelöst:

$$\frac{7-x}{x-1} = \frac{1-x}{x-7} \quad \Big| \cdot (x-7)(x-1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(x-7)^2 = -(x-1)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-7)^2 = (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 14x + 49 = x^2 - 2x + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -14x + 49 = -2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 48 = 12x \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

Ein Wechsel des Verhaltens der Ungleichung ist demnach nur bei $x = 1$, $x = 4$ und $x = 7$ möglich:

- Für $x = 0 < 1$ ist die linke Seite gleich -7, die rechte gleich $-\frac{1}{7}$. Für $x < 1$ ist die Ungleichung also erfüllt.
- Für $x = 2$ $(1 < 2 < 4)$ ist die linke Seite gleich 5, die rechte gleich $\frac{1}{5}$. Für $1 < x < 4$ ist die Ungleichung also nicht erfüllt.
- Für $x = 5$ $(4 < 5 < 7)$ ist die linke Seite gleich $\frac{1}{2}$, die rechte gleich 2. Für $4 < x < 7$ ist die Ungleichung also erfüllt.
- Für $x = 8 > 7$ ist die linke Seite gleich $-\frac{1}{7}$, die rechte gleich -7. Für $7 < x$ ist die Ungleichung also nicht erfüllt.

Als Lösungsmenge erhält man $(-\infty, 1) \cup (4, 7)$. Diese Menge ist offen, weil keiner der Randpunkt 1, 4 und 7 zur Menge gehört.

d) Die Ungleichung ist für $x = 7$ nicht definiert. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, wird zunächst die zugehörige Gleichung gelöst:

$$\frac{x-7}{24} = \frac{1-x}{x-7} \quad \Big| \cdot (x-7) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-7)^2 = 24(1-x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-7)^2 + 24(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 14x + 49 + 24x - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 10x + 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+5)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -5$$

Ein Wechsel des Verhaltens der Ungleichung ist demnach nur bei $x = -5$ und $x = 7$ möglich:

- Für $x = -9 < -5$ ist die linke Seite gleich $-\frac{16}{24} = -\frac{2}{3}$, die rechte gleich $-\frac{10}{16} = -\frac{5}{8} - \frac{15}{24}$. Für $x < 1$ ist die Ungleichung also nicht erfüllt.
- Für $x = 0$ $(-5 < 0 < 7)$ ist die linke Seite gleich $-\frac{7}{24}$, die rechte gleich $-\frac{1}{7}$. Für $1 < x < 4$ ist die Ungleichung also nicht erfüllt.
- Für $x = 8 > 7$ ist die linke Seite gleich $\frac{1}{24}$, die rechte gleich -7. Für $7 < x$ ist die Ungleichung also erfüllt.

Als Lösungsmenge erhält man $\{-5\} \cup (7, \infty)$. Diese Menge ist weder offen noch abgeschlossen, weil der Randpunkt -5 zur Menge gehört, der Randpunkt 7 aber nicht.

Aufgabe 2. Zur Lösung werden die Funktionen in einfachere Teile zerlegt. Unverzichtbar ist eine gute graphische Vorstellung der vorkommenden Teilfunktionen.

Bei den vorliegenden Aufgaben sind die innersten Funktionen Geraden ($u = 3x - 2$, $u = 1 - x$) und einfache Parabeln ($u = -x^2 + 4$, $u = 1 - x^2$, $u = x^2 - 1$). Als äußere Funktionen kommen Wurzeln ($y = \sqrt{u}$), Logarithmen ($y = \ln u$) und Beträge ($y = |u|$) vor, zunächst einzeln, dann kombiniert.

a) Die Funktion ist definiert, wo der Ausdruck $u(x) := 3x - 2$ unter der Wurzel nicht negativ ist, also

$$D(f) = u^{-1}([0, \infty)) = [\frac{2}{3}, \infty)$$

Für den Wertebereich ergibt sich

$$W(f) = \sqrt{u(D(f))} = \sqrt{[0, \infty)} = [0, \infty)$$

b) Die Funktion ist definiert, wo $u(x) := -x^2 + 4 \geq 0$, also $x^2 \leq 4$ gilt:

$$D(f) = [-2, 2]$$

Für den Wertebereich ergibt sich

$$W(f) = \sqrt{u(D(f))} = \sqrt{u([-2, 2]} = \sqrt{[0, 4]} = [0, 2]$$

c) Die Funktion ist definiert, wo $u(x) := 1 - x^2 > 0$, also $x^2 < 1$ gilt:

$$D(f) = (-1, 1)$$

Für den Wertebereich ergibt sich

$$W(f) = \ln u((-1,1)) = \ln(0,2] = (-\infty, 0]$$

d) Damit die Funktion definiert ist, muss zunächst $u(x) := x^2 - 1 > 0$, also $x^2 > 1$ sein. Dies bedeutet $|x| > 1$. Zusätzlich darf der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ sein: $v(x) := \ln(x^2 - 1) \geq 0$. Da der Logartihmus ab $x = 1$ positiv ist, heißt dies $x^2 - 1 \geq 1$, was zu $x^2 \geq 2$, also $|x| \geq \sqrt{2}$ führt. Die erste Bedingung ($|x| > 1$) ist darin enthalten, also:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$$

Für den Wertebereich ergibt sich

$$W(f) = \sqrt{v(D(f))} = \sqrt{\ln(u(D(f)))} = \sqrt{\ln(u((-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)))}$$

$$= \sqrt{\ln[1, \infty)} = \sqrt{[0, \infty)} = [0, \infty)$$

e) Die Funktion ist definiert, wo $u(x) := |1 - x| > 0$, also für $x \neq 1$:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Mit $v(x) := 1 - x$ ist

$$W(f) = \ln u(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \ln |v(\mathbb{R} \setminus \{1\})| = \ln |\mathbb{R} \setminus \{0\}| = \ln(0, \infty) = \mathbb{R}$$

Aufgabe 3.
a) Die Funktion ist überall definiert:

$$D(f_0) = \mathbb{R}$$

Es handelt sich um eine nach unten geöffnete (weil das Vorzeichen von x^2 negativ ist) Parabel. Die Nullstellen sind bei

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = 1 \pm 2$$

Bei $x = 1$ hat die Parabel ihren Scheitel. (Kann auf verschiedene Weise herausgefunden werden.) Der zugehörige Funktionswert ist $f_0(1) = 4$. Der Wertebereich ist folglich

$$W(f_0) = (-\infty, 4]$$

b) Die Funktion f_1 ist definiert, wo die Funktion f_0 nicht negativ ist:

$$D(f_1) = f_0^{-1}([0, \infty)) = [-1, 3]$$

Für den Wertebereich ergibt sich

$$W(f_1) = f_1([-1,3]) = \sqrt{f_0([-1,3])} = \sqrt{[0,4]} = [0,2]$$

c) Die Funktion ist überall definiert:

$$D(f_2) = \mathbb{R}$$

Für den Wertebereich ergibt sich:

$$W(f_2) = f_2(\mathbb{R}) = |f_0(\mathbb{R})| = |(-\infty,4]| = [0,\infty)$$

d) Die Funktion ist überall definiert:

$$D(f_3) = \mathbb{R}$$

Für den Wertebereich ergibt sich:

$$W(f_3) = f_3(\mathbb{R}) = \sqrt{f_2(\mathbb{R})} = \sqrt{[0,\infty)} = [0,\infty)$$

e) Die Funktion ist definiert, wo f_3 nicht 0 ist:

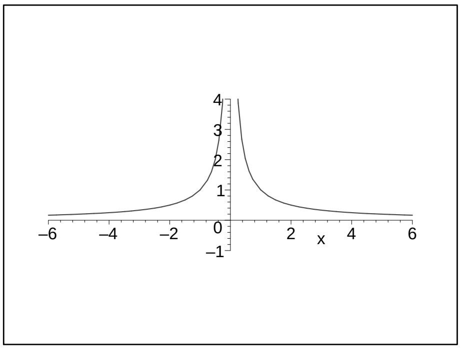
$$D(f_4) = \mathbb{R} \setminus f_3^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \setminus f_0^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{-1,3\}$$

Für den Wertebereich ergibt sich:

$$W(f_4) = f_4(\mathbb{R} \setminus \{-1,3\}) = \frac{1}{f_3(\mathbb{R} \setminus \{-1,3\})} = \frac{1}{(0,\infty)} = (0,\infty)$$

Aufgabe 4.

Betrachtet man die Funktions-Vorschrift mit ihrem maximalen Definitionsbereich, so bewirkt der Parameter a lediglich eine Verschiebung in x-Richtung (um a nach rechts). Nebenstehende Skizze zeigt die Funktion für $a = 0$. Wir nennen sie $g(x)$.



Zu beachten ist nun, dass der Definitionsbereich auf $[0,3]$ beschränkt ist. Je nach Wert von a wird dadurch ein anderer Bereich der Funktion relevant.

a) Die Funktion $f(x)$ ist monoton wachsend (genau dann), wenn von $g(x)$ nur der Bereich links der y-Achse relevant ist. Dazu muss die Verschiebung mindestens 3 sein. Die Funktion $f(x)$ ist monoton fallend (genau dann), wenn von $g(x)$ nur der Bereich rechts der y-Achse relevant ist. Dazu muss die Verschiebung negativ (oder Null) sein.

Die Funktion $f(x)$ ist also genau dann monoton, wenn $a \geq 3$ oder $a \leq 0$. Im ersten Fall ist die Funktion streng monoton wachsend, im zweiten streng monoton fallend.

b) Die Funktion $f(x)$ ist offenbar für jedes a nach unten beschränkt (durch 0). Nach oben beschränkt ist sie (genau dann), wenn der Pol der Funktion $g(x)$ durch die Verschiebung nicht ins Intervall $[0, 3]$ gelangt. Die Verschiebung muss hierzu (echt) negativ oder (echt) größer als 3 sein.

Die Funktion $f(x)$ ist also genau dann beschränkt, wenn $a > 3$ oder $a < 0$.

c) Damit die Funktion $f(x)$ injektiv ist, dürfen von $g(x)$ offenbar nicht gleichzeitig Teile links und rechts der y-Achse relevant werden. Der Pol darf also nicht im Inneren des Intervalls $[0, 3]$ zu liegen kommen. Die Verschiebung darf also nicht (echt) zwischen 0 und 3 liegen.

Die Funktion $f(x)$ ist also genau dann injektiv, wenn $a \geq 3$ oder $a \leq 0$.

d) Da die Funktion $f(x)$ für negative x nicht definiert ist, kann sie weder gerade noch ungerade sein. (Für $a = \frac{3}{2}$ ist die Funktion aber symmetrisch zur Geraden $x = \frac{3}{2}$.)

e) Da die Funktion $f(x)$ nur im Intervall $[0, 3]$ definiert ist, kann sie keine waagrechten oder schiefen Asymptoten haben. Eine senkrechte Asymptote hat sie genau dann, wenn der Pol im Intervall $[0, 3]$ zu liegen kommt, also für $0 \leq a \leq 3$.

Aufgabe 5.

a) Eine der einfachsten Konstruktionen besteht darin, Halbkreise mit Durchmesser 1 aneinander zu setzen, wobei zwischen oberen und unteren Hälften abgewechselt wird. Im Intervall $[-1, 0]$ wählen wir die untere Hälfte, im Intervall $[0, 1]$ die obere Hälfte eines solchen Kreises. Es entsteht eine sinusartige Wellenlinie, die an allen ganzzahligen Werten eine senkrechte Tangente besitzt.

Für jede derartige Funktion f ist $f(-1) = -f(1)$, weil die Funktion ungerade ist. Andererseits ist $f(1) = f(1-2) = +f(-1)$, weil f die Periode 2 hat. Es ergibt sich $f(-1) = -f(-1)$, also $f(-1) = 0$.

b) Die einfachste Möglichkeit ist, im Intervall $[-1, 1]$ die Funktion $f(x) = |x|$ zu wählen und dieses Teil auf beiden Seiten immer wieder anzusetzen. Es entsteht eine Zickzacklinie, die an allen ganzzahligen Werten einen Knick aufweist.

Wie das Beispiel zeigt, ist nicht sichergestellt, dass die Tangente an der Stelle $x = 5$ existiert. Ist dies jedoch der Fall, so unterscheidet sich die Steigung wegen der Symmetrie nur durch das Vorzeichen von der Steigung bei $x = -5$. Die Differenz dieser beiden Stellen (10) ist aber ein Vielfaches der Periode. Die Steigungen müssen also gleich sein. Beide Bedingungen sind nur erfüllt, wenn die Steigung 0 ist. Die Tangente bei $x = 5$ ist also (falls sie existiert) waagrecht.

c) Eine einfache Möglichkeit ist, im Intervall $[-1, 0]$ die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ zu wählen und dieses Stück auf beiden Seiten immer wieder anzusetzen. Eine gerade Funktion entsteht etwa, wenn wir von der Funktion $f(x) = \frac{-1}{x^2}$ im Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ausgehen.

Eine ungerade Funktion mit den gegebenen Eigenschaften gibt es nicht. Wegen $f(-x) = -f(x)$ können ungerade Funktionen nicht nach oben beschränkt und nach unten unbeschränkt (oder umgekehrt) sein.

Aufgabe 6. Die Anzahl der Nullen einer Zahl bestimmt sich daraus, wie oft 2 und 5 in der Primfaktorzerlegung der Zahl vorkommen. Offenbar sind die 2er immer in der Überzahl, so dass man sich nur um die 5er kümmern muss.

Die Anzahl der 5er in der Primfaktorzerlegung von 1000! errechnet sich als: Zahl der durch 5 teilbaren Zahlen + durch 25 teilbare Zahlen + durch 125 teilbare + durch 625 teilbare. Dies sind $200 + 40 + 8 + 1 = 249$. Die Zahl 1000! endet also auf (genau) 249 Nullen.

Aufgabe 7.
a) Die Folge gibt die Darstellung der Zahl 10 in verschiedenen Stellenwertsystemen an. Zuerst im Dezimalsystem, dann in einem System mit der Basis 9, dann im Oktalsystem, usw.. Zuletzt kommt die Darstellung im Dualsystem.

b) Die Folge gibt die Darstellung der Zahl 16 in verschiedenen Stellenwertsystemen an, beginnend mit dem Hexadezimalsystem. Zuletzt kommt wieder das Dualsystem. Die Folge hat also 16-1=15 Glieder, das letzte Glied lautet 10 000.