Thema: Extrema bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

Aufgabe 1. SS 05, Höhere Mathematik 2

Über der gesamten reellen Ebene ist eine Fläche mit der Gleichung

$$z(x, y) = -4xy + 2x^2 + y^4 - 1$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle relativen Maxima und Minima dieser Fläche.

b) Über dem quadratischen Bereich im 1. Quadranten mit den Eckpunkten $O(0/0)$, $A(2/0)$, $B(2/2)$, $C(0/2)$ bestimme man die größten und kleinsten Funktionswerte von $z(x, y)$.

c) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene im Flächenpunkt mit $x = 2$ und $y = 0$?

d) Bestimmen Sie die Steigung der Tangente der Schnittkurve der Fläche mit der $x - y-$Ebene im Punkt $P(0/1)$.

Aufgabe 2. SS 09, Analysis 2 (29 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = (86 + \sin x) \cdot (y^2 + \cos y)$$

a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f und die Hesse-Matrix H_f. Begründen Sie, warum überall $f_{yy} > 0$ gilt.

b) Geben Sie die Tangentialebenen der Fläche $z = f(x, y)$ an den Stellen $(0, 0)$ und $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ an.

c) Zeigen Sie, dass $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(\frac{\pi}{2}, 0)$ stationäre Stellen von f sind. Prüfen Sie jeweils, ob es sich um ein relatives Minimum, ein relatives Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

d) Zeigen Sie, dass alle stationären Stellen von f auf der x-Achse liegen. Geben Sie alle relativen Minima und alle relativen Maxima an.

Thema: Extremwertaufgaben

Aufgabe 3. SS 06, Analysis 2

Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - \alpha - \beta x\right)^2 \, dx$$

minimal ist. Untersuchen Sie die Hesse-Matrix an der Lösung.

Aufgabe 4. Eine zylindrische Dose soll 500ml fassen und für ihre Fertigung möglichst wenig Blech benötigen.

Aufgabe 5. SS 07, Analysis 2

In der Ebene sind die beiden Punkte $A(0, 0)$ und $B(4, 0)$ sowie der Kreis K um $M(5, 4)$ mit Radius $r = 3$ gegeben. Bestimmen Sie die Punkte C_1 und C_2 auf K so, dass die Summe der Quadrate der Abstände $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ minimal beziehungsweise maximal wird.

Aufgabe 6. SS 08, Analysis 2 (20 Punkte)

Betrachtet werden alle Ellipsen der Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit $a, b > 0$, auf denen der Punkt $P(3, 1)$ liegt.

a) Bestimmen Sie diejenige Ellipse, deren Flächeninhalt $F = \pi\, a\, b$ minimal ist. Ein Nachweis, dass Ihre Lösung ein Minimum darstellt, ist nicht erforderlich.

b) Vergleichen Sie den Flächeninhalt der von Ihnen bestimmten Ellipse mit dem Flächeninhalt des Kreises um den Nullpunkt, auf dem der Punkt P liegt. Prüfen Sie nach, dass der Flächeninhalt der Ellipse kleiner als der des Kreises ist.