Aufgabe 1.

$$z(x, y) = -4xy + 2x^2 + y^4 - 1$$

a) Notwendig für relative Extrema:

$$z_x = -4y + 4x \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad z_y = -4x + 4y^3 \stackrel{!}{=} 0$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $y = x$, was in die zweite Gleichung eingesetzt wird:

$$0 = -4x + 4x^3 = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$$

Kandidaten für Extremstellen sind demnach $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(-1, -1)$. Für die zweiten Ableitungen gilt

$$z_{xx} = 4 \ , \quad z_{yy} = 12y^2 \ , \quad z_{xy} = -4$$

Die Determinate der Hesse-Matrix ist

$$D = z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = 4 \cdot 12y^2 - 4 \cdot 4 = 16(3y^2 - 1)$$

In P_1 ist diese Determinante negativ (< 0), es liegt also kein Extremum vor. In den anderen beiden Punkten ist die Determinante positiv (> 0), also ein Extremum. Wegen $z_{xx} > 0$ ist sowohl bei P_2, als auch bei P_3 ein relatives Minimum:

$$M_2(1, 1, -2) \ , \quad M_3(-1, -1, -2)$$

b) In dem quadratischen Bereich $[0, 2]^2$ liegt nur der Punkt P_2, nicht aber P_3. Zu untersuchen ist aber noch der Rand.

- Auf $\overline{OC}$ ist $x = 0$, also $z = y^4 - 1$. Der maximale Wert ist $z = 15$ bei $y = 2$, der minimale Wert ist $z = -1$ bei $y = 0$.
- Auf $\overline{OA}$ ist $y = 0$, also $z = 2x^2 - 1$. Der maximale Wert ist $z = 7$ bei $x = 2$, der minimale Wert ist $z = -1$ bei $x = 0$.
- Auf $\overline{CB}$ ist $y = 2$, also $z = -8x + 2x^2 + 15 = 2(x - 2)^2 + 7$. Der maximale Wert ist $z = 15$ bei $x = 0$, der minimale Wert ist $z = 7$ bei $x = 2$.
- Auf $\overline{AB}$ ist $x = 2$, also $z = -8y + y^4 + 7$. Die Ableitung ist $z' = -8 + 4y^3$. Einzige stationäre Stelle ist daher bei $y = \sqrt[3]{2}$. Dort ist $z = 7 + \sqrt[3]{2}(-8 + 2) = 7 - 6\sqrt[3]{2} \approx -0,56$. In beiden Randpunkten ($y = 0$ und $y = 2$) ist $z = 7$.

Der größte Funktionswert wird also am Rand angenommen, nämlich im Punkt $C(0, 2)$. Der Funktionswert ist dort $z = 15$. Der kleinste Funktionswert wird im Innern erreicht, nämlich in $P_2(1, 1)$. Der Funktionswert ist dort $z = -2$.

c) Die partiellen Ableitungen in $(2, 0)$ sind

$$z_x = 8 \ , \quad z_y = -8$$

Der zugehörige Funktionswert ist $z = 7$. Die Tangentialebene ist

$$8 \cdot (x-2) - 8 \cdot (y-0) - (z-7) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 8x - 8y - z - 9 = 0$$

d) Die Schnittkurve hat die implizite Darstellung

$$z(x,y) = -4xy + 2x^2 + y^4 - 1 = 0$$

Im Punkt $P(0/1)$ ist

$$z_x = -4\ , \quad z_y = 4$$

Für die Tangenten-Steigung gilt

$$y' = -\frac{z_x}{z_y} = -\frac{-4}{4} = 1$$

Aufgabe 2.
a) Der Gradient besteht aus den partiellen Ableitungen:

$$\nabla z = \begin{pmatrix} \cos x \cdot (y^2 + \cos y) \\ (86 + \sin x) \cdot (2y - \sin y) \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Matrix enthält die Ableitungen zweiter Ordnung:

$$H_f = \begin{pmatrix} -\sin x \cdot (y^2 + \cos y) & \cos x \cdot (2y - \sin y) \\ \cos x \cdot (2y - \sin y) & (86 + \sin x) \cdot (2 - \cos y) \end{pmatrix}$$

Es ist

$$z_{yy}(x,y) = \underbrace{(86 + \sin x)}_{\geq 85 > 0} \cdot \underbrace{(2 - \cos y)}_{\geq 1 > 0} > 0$$

b) Die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0) ist

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Im Punkt $(0, 0)$ ist dies

$$z = 86 + 1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) = 86 + x$$

Im Punkt $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ist die Tangentialebene

$$z = (86 - 1) + 0 \cdot (x + \frac{\pi}{2}) + 0 \cdot (y - 0) = 85$$

c) Zu zeigen ist, dass beide partiellen Ableitungen an den angegebenen Stellen verschwinden:

$$z_x(\pm\frac{\pi}{2},0) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$z_y(\pm\frac{\pi}{2},0) = (86 \pm 1) \cdot 0 = 0$$

Bei $(-\frac{\pi}{2},0)$ ist

$$H_f = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & (86-1) \cdot 1 \end{pmatrix} , \qquad |H_f| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 85 \end{vmatrix} = 85 > 0$$

An dieser Stelle liegt also ein Extremum vor. Wegen $z_{yy} > 0$ handelt sich um ein relatives Minimum. Bei $(\frac{\pi}{2},0)$ ist

$$H_f = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & (86+1) \cdot 1 \end{pmatrix} , \qquad |H_f| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 87 \end{vmatrix} = -87 < 0$$

Dort befindet sich also ein Sattelpunkt.

d) An stationären Stellen ist

$$z_y = \underbrace{(86 + \sin x)}_{\neq 0} \cdot (2y - \sin y) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = \sin y$$

Wegen $|\sin y| \leq |y|$ (für alle $y \in \mathbb{R}$) kann diese Bedingung nur für $y = 0$, also auf der x-Achse erfüllt werden. Die stationären Stellen sind

$$(x_k, y_k) = (\frac{\pi}{2} + k\pi, 0) , \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Es handelt sich dabei abwechselnd um Minima und Sattelpunkte. Die relativen Minima sind bei

$$(x_k, y_k) = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0) , \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Der Funktionswert ist jeweils 85. Relative Maxima hat die Funktion nicht.

Aufgabe 3. Es ist

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) \quad &:= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - \alpha - \beta x\right)^2 \, dx \\ &= \int_0^1 \left(x + \alpha^2 + \beta^2 x^2 - 2\alpha\sqrt{x} - 2\beta x^{\frac{3}{2}} + 2\alpha\beta x\right) \, dx \\ &= \int_0^1 \left((1 + 2\alpha\beta)x + \alpha^2 + \beta^2 x^2 - 2\alpha\sqrt{x} - 2\beta x^{\frac{3}{2}}\right) \, dx \end{aligned}$$

$$= \left[(1+2\alpha\beta)\frac{x^2}{2} + \alpha^2 x + \beta^2 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 2\alpha \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\beta \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(1+2\alpha\beta) + \alpha^2 + \frac{1}{3}\beta^2 - \frac{4}{3}\alpha - \frac{4}{5}\beta$$

Notwendig für Extremwerte: $f_\alpha = f_\beta = 0$

$$f_\alpha = 2\alpha + \beta - \frac{4}{3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$f_\beta = \alpha + \frac{2}{3}\beta - \frac{4}{5} \stackrel{!}{=} 0$$

Erste Gleichung minus zwei mal zweite Gleichung:

$$-\frac{1}{3}\beta = 4 \cdot (\frac{1}{3} - \frac{2}{5}) \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 4 \cdot (-1 + \frac{6}{5}) = \frac{4}{5}$$

Zwei mal erste Gleichung minus drei mal zweite Gleichung:

$$\alpha = 4 \cdot (\frac{2}{3} - \frac{3}{5}) = 4 \cdot (\frac{10}{15} - \frac{9}{15}) = \frac{4}{15}$$

Die zweiten Ableitungen sind

$$f_{\alpha\alpha} = 2\ , \quad f_{\beta\beta} = \frac{2}{3}\ , \quad f_{\alpha\beta} = 1$$

Die Determinante D der Hesse-Matrix ist damit

$$D = f_{\alpha\alpha} \cdot f_{\beta\beta} - f_{\alpha\beta}^2 = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3} > 0$$

Es liegt also ein Extremum vor. Wegen $f_{\alpha\alpha} > 0$ handelt es sich um ein Minimum.

Aufgabe 4. Die Oberfläche O des Zylinders soll minimiert werden. Die Oberfläche besteht aus der Mantelfläche und zwei Deckflächen:

$$O(r,h) = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2$$

Dabei ist r der Radius und h die Höhe des Zylinders. Als Nebenbedingung muss das Volumen V den vorgegebenen Wert V_0 (500ml) besitzen:

$$V(r,h) = \pi r^2 \cdot h \stackrel{!}{=} V_0$$

Hieraus wird die Lagrange-Funktion gebildet:

$$F(r,h,\lambda) := O(r,h) + \lambda \cdot (V(r,h) - V_0) = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda \cdot (\pi r^2 h - V_0)$$

Ihre partiellen Ableitungen müssen verschwinden:

$$F_r = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi\lambda rh \stackrel{!}{=} 0$$

$$F_h = 2\pi r + \pi\lambda r^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$F_\lambda = \pi r^2 h - V_0 \stackrel{!}{=} 0$$

Wegen $V_0 > 0$ sind auch r und h nicht 0. Erste Gleichung minus zweite Gleichung mal $\frac{2h}{r}$ eliminiert λ:

$$4\pi r + 2\pi h - 2h \cdot 2\pi = 4\pi r - 2\pi h = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 2r$$

Eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt sich

$$\pi r^2 \cdot 2r - V_0 = 2\pi r^3 - V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$$

Für $V_0 = 500ml$ ist

$$r = \sqrt[3]{\frac{1l}{4\pi}} \approx 4.3cm\ , \quad h \approx 8.6cm$$

Aufgabe 5. Die zu minimierende Funktion ist

$$f(x,y) = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = ((x-0)^2 + (y-0)^2) + ((x-4)^2 + (y-0)^2) = x^2 + (x-4)^2 + 2y^2$$

Dabei sind x und y die Koordinaten des Punktes C. Als Nebenbedingung muss der Punkt C auf dem Kreis K liegen:

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 9$$

Hieraus wird die Lagrange-Funktion gebildet:

$$F(x,y,\lambda) := x^2 + (x-4)^2 + 2y^2 + \lambda \cdot ((x-5)^2 + (y-4)^2 - 9)$$

Ihre partiellen Ableitungen müssen verschwinden:

$$F_x = 2x + 2(x-4) + 2\lambda(x-5) = 4x - 8 + 2\lambda(x-5) = 4(x-2) + 2\lambda(x-5) \stackrel{!}{=} 0$$

$$F_y = 4y + 2\lambda(y-4) \stackrel{!}{=} 0$$

$$F_\lambda = (x-5)^2 + (y-4)^2 - 9 \stackrel{!}{=} 0$$

Erste Gleichung mal $(y-4)$ minus zweite Gleichung mal $(x-5)$ eliminiert λ:

$$4(x-2)(y-4) - 4y(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = (x-2)(y-4) - y(x-5) = xy - 4x - 2y + 8 - xy + 5y = 3y - 4x + 8$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}(x-2)$$

Eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt sich

$$0 = (x-5)^2 + (\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} - 4)^2 - 9 = (x-5)^2 + \frac{16}{9}(x-2-3)^2 - 9 =$$

$$= (x-5)^2 \cdot (1 + \frac{16}{9}) - 9 = \frac{25}{9}(x-5)^2 - 9$$

$$\Rightarrow \quad (x-5)^2 = 9 \cdot \frac{9}{25} \quad \Rightarrow \quad x = 5 \pm \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{34}{5}\ , \quad x_2 = \frac{16}{5}$$

Für y ergibt sich

$$y = \frac{4}{3}(x-2) = \frac{4}{3}(3 \pm \frac{9}{5}) = 4 \pm \frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = \frac{32}{5}\ , \quad y_2 = \frac{8}{5}$$

Der Kreis K ist kompakt. Die stetige Funktion f besitzt dort also ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum. Wegen

$$f(x_1, y_1) = \frac{34^2}{25} + \frac{14^2}{25} + 2 \cdot \frac{32^2}{25} = \frac{4}{25}(17^2 + 7^2 + 2 \cdot 16^2)$$

$$f(x_2, y_2) = \frac{16^2}{25} + \frac{4^2}{25} + 2 \cdot \frac{8^2}{25} = \frac{4}{25}(8^2 + 2^2 + 2 \cdot 4^2) < f(x_1, y_1)$$

ist bei $C_1(\frac{34}{5}, \frac{32}{5})$ das absolute Maximum, bei $C_2(\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$ das absolute Minimum.

Aufgabe 6.

a) Setzt man die Koordinaten von P in die Ellipsengleichung ein, so erhält man die Gleichung

$$\frac{9}{a^2} \quad + \quad \frac{1}{b^2} \quad = \quad 1$$

Zu minimieren ist dann die Funktion

$$f(a, b) \quad = \quad ab$$

unter dieser Gleichungs-Nebenbedingung. Die Langrange-Funktion ist

$$F(a, b, \lambda) \quad = \quad ab \quad + \quad \lambda \cdot \left(\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} - 1 \right) \qquad \text{mit } a, b > 0$$

Für die partiellen Ableitungen gilt

$$F_a \quad = \quad b - \lambda \cdot \frac{18}{a^3} \quad \stackrel{!}{=} \quad 0$$

$$F_b \quad = \quad a - \lambda \cdot \frac{2}{b^3} \quad \stackrel{!}{=} \quad 0$$

$$F_\lambda \quad = \quad \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} - 1 \quad \stackrel{!}{=} \quad 0$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$\lambda = a^3 b/18 = ab^3/2 \quad \text{also} \qquad a^2 = 9b^2$$

Eingesetzt in die dritte Gleichung (Nebenbedingung) ergibt dies

$$b^2 = 2 \qquad \text{und} \qquad a^2 = 18$$

Die Ellipse mit dem minimalen Flächeninhalt ist demnach

$$\frac{x^2}{18} \quad + \quad \frac{y^2}{2} \quad = \quad 1$$

Hinweis: Die Aufgabe kann auch durch Elimination gelöst werden. Aus der Gleichungsbedingung ergibt sich $b^2 = a^2/(a^2-9)$ und damit als Zielfunktion

$$F(a) = \pi \, \frac{a^2}{\sqrt{a^2-9}} \; .$$

Aus $F'(a) = 0$ folgt dann $a^2 = 18$, also die gleiche Lösung wie oben.

b) Der Radius des Kreises, auf dem P liegt, beträgt $\sqrt{10}$. Dieser Kreis hat also den Flächeninhalt 10π. Als Flächeninhalt der in a) bestimmten Ellipse ergibt sich dagegen $\pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6\pi$.