Thema: Substitution bei Differentialgleichungen erster Ordnung

Aufgabe 1. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{2y} \qquad (x > 0)$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

b) Welche Lösungen sind auf $(1, \infty)$ monoton fallend ?

c) Welche Lösung erfüllt die Anfangsbedingung $y(1) = 1$?

d) Welche Lösung erfüllt die Anfangsbedingung $y(1) = -1$?

Aufgabe 2. Gegeben sei, für $\gamma > 0$, die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x} + \gamma \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \qquad (x < 0)$$

a) Ermitteln Sie diejenige Lösung y_1 der Differentialgleichung, die der Anfangsbedingung $y_1(-1) = 0$ genügt.

b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von γ die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0} y_1(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0} y_1'(x)$.

Thema: Substitution bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme:

a) $\ddot{y} + \dot{y} \cdot \dfrac{1}{t+2} = 1, \; y(0) = \dot{y}(0) = 0$

b) $\ddot{y} + \dot{y}^2 \cdot \dfrac{1}{y+2} = 0, \; y(0) = \dot{y}(0) = 1$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y'' - 3xy' + 7y = 0$$

Hinweis: Es handelt sich um eine Eulersche Differntialgleichung. Sie kann mittels der Substitution $x = e^t$ in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für y in Abhängigkeit von t überführt werden.

Aufgabe 5. WS 96/97, Höhere Mathematik 1

a) Bestimmen Sie fuer $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + y \cdot \tan x = 2\cos^2 x.$$

b) Ermitteln Sie für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + y' \cdot \tan x = 2\cos^2 x$$

$$y(\frac{\pi}{6}) = y'(\frac{\pi}{6}) = 0.$$

c) Geben Sie eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = s(x)$$

mit konstanten Koeffizienten a und b an, deren allgemeine Lösung die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus Teilaufgabe a umfaßt.

Hinweis: Die Aufgabenteile *b* und *c* sind unabhängig voneinander lösbar.

Zum Knobeln

Aufgabe 6.

a) Ein Rechteck mit den Seiten 16 und 9 soll so in zwei Teile zerschnitten werden, dass man aus den beiden Teilen ein Quadrat zusammenlegen kann.

Hinweis: Die Schnittlinie ist treppenförmig.

b) Welche anderen Rechtecke lassen sich auf die gleiche Art in ein Quadrat verwandeln?