

Aufgabe 1.

a) Es handelt sich um eine Ähnlichkeits-Differentialgleichung. Durch Substitution kann diese in eine separable Differentialgleichung überführt werden:

$$\begin{aligned} z(x) = \frac{y(x)}{x} &\Rightarrow y = x \cdot z &\Rightarrow y' = z + x \cdot z' \\ \Rightarrow z + xz' = z + \frac{1}{2z} &\Rightarrow xz' = \frac{1}{2z} \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung lösen wir durch Trennung der Veränderlichen:

$$2z \cdot dz = \frac{1}{x} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad z^2 = \ln|x| + C = \ln x + C$$

Die allgemeine Lösung der Ausgangs-Differentialgleichung ist demnach:

$$y = \pm x \sqrt{C + \ln x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

b) Die Lösungs-Funktion soll für alle $x > 1$ definiert sein. Daher muss $C \geq 0$ sein. Welche Lösungen hiervon monoton fallend sind bestimmen wir mittels der Ableitung:

$$y' = \pm \sqrt{C + \ln x} \pm x \cdot \frac{1}{2\sqrt{C + \ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \pm \underbrace{\frac{1}{\sqrt{C + \ln x}} \cdot \left(\underbrace{C}_{\geq 0} + \underbrace{\ln x + \frac{1}{2}}_{> 0} \right)}_{> 0}$$

Auf $(1, \infty)$ monoton fallend sind also genau die Lösungen:

$$y = -x \sqrt{C + \ln x} \quad (C \geq 0)$$

c) Die gesuchte Lösung ergibt sich durch Einsetzen der Anfangsbedingung:

$$1 = y(1) = \pm 1 \cdot \sqrt{C + \ln 1} = \pm \sqrt{C} \quad \Rightarrow \quad y = +x \sqrt{1 + \ln x} \quad \left(x > \frac{1}{e} \right)$$

(An der Stelle $x = \frac{1}{e}$ ist zwar die Funktion definiert, nicht aber die Differentialgleichung. Die Lösung y wird dort nämlich 0 und y tritt in der Differentialgleichung im Nenner auf.)

d) Die gesuchte Lösung ergibt sich durch Einsetzen der Anfangsbedingung:

$$-1 = y(1) = \pm 1 \cdot \sqrt{C + \ln 1} = \pm \sqrt{C} \quad \Rightarrow \quad y = -x \sqrt{1 + \ln x} \quad \left(x > \frac{1}{e} \right)$$

Aufgabe 2.

a) Es handelt sich um eine Ähnlichkeits-Differentialgleichung. Durch Substitution kann diese in eine separable Differentialgleichung überführt werden:

$$\begin{aligned} z(x) = \frac{y(x)}{x} &\Rightarrow y = x \cdot z \Rightarrow y' = z + x \cdot z' \\ \Rightarrow z + xz' &= z + \gamma \cdot \sqrt{1+z^2} \Rightarrow xz' = \gamma \cdot \sqrt{1+z^2} \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung lösen wir durch Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \gamma \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \Rightarrow \operatorname{arsinh} z = \gamma \ln |x| + C = \gamma \ln(-x) + C$$

Hierin setzen wir die Anfangsbedingung ein:

$$\begin{aligned} y(-1) = 0 &\Rightarrow z(-1) = 0 \Rightarrow \operatorname{arsinh} z = 0 \Rightarrow 0 = \gamma \cdot 0 + C \\ \Rightarrow C &= 0 \Rightarrow \operatorname{arsinh} z = \gamma \ln(-x) \\ \Rightarrow z &= \sinh(\gamma \ln(-x)) = \sinh \ln [(-x)^\gamma] = \frac{1}{2} \cdot [e^{\ln[(-x)^\gamma]} - e^{-\ln[(-x)^\gamma]}] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(-x)^\gamma - (-x)^{-\gamma}] \end{aligned}$$

Die zugehörige Lösung der Ausgangs-Differentialgleichung ist demnach:

$$y_1 = \frac{1}{2} x \cdot [(-x)^\gamma - (-x)^{-\gamma}] = -\frac{1}{2} [(-x)^{1+\gamma} - (-x)^{1-\gamma}] = \frac{1}{2} [(-x)^{1-\gamma} - (-x)^{1+\gamma}]$$

b) Für den ersten Grenzwert gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} y_1(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{2} [(-x)^{1-\gamma} - (-x)^{1+\gamma}] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0-} (-x)^{1-\gamma} - \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0-} (-x)^{1+\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0-} (-x)^{1-\gamma} - 0 = \begin{cases} 0 & \gamma < 1 \\ \frac{1}{2} & \gamma = 1 \\ +\infty & \gamma > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ableitung der Lösungsfunktion:

$$y_1'(x) = -\frac{1}{2}(1-\gamma)(-x)^{-\gamma} + \frac{1}{2}(1+\gamma)(-x)^\gamma$$

Für den zweiten Grenzwert gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} y_1'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} y_1'(x) = -\frac{1}{2}(1-\gamma) \cdot \lim_{x \rightarrow 0-} (-x)^{-\gamma} + \frac{1}{2}(1+\gamma) \cdot \lim_{x \rightarrow 0-} (-x)^\gamma \\ &= -\frac{1}{2}(1-\gamma) \cdot \lim_{x \rightarrow 0-} (-x)^{-\gamma} + 0 = \frac{1}{2}(\gamma-1) \cdot \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{1}{u^\gamma} = \begin{cases} -\infty & \gamma < 1 \\ 0 & \gamma = 1 \\ +\infty & \gamma > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Der erste Grenzwert existiert also für $0 < \gamma \leq 1$, der zweite nur für $\gamma = 1$.

Aufgabe 3.

a) Bei $t = -2$ ist die Gleichung nicht definiert. Wegen der Anfangsbedingung bei 0 müssen wir uns auf $t > -2$ beschränken. Es handelt sich um eine reduzierbare Differentialgleichung:

$$z(t) = \dot{y}(t) \Rightarrow \dot{z} + z \cdot \frac{1}{t+2} = 1$$

Die reduzierte Differentialgleichung ist linear. Wir lösen die homogene Gleichung:

$$\text{Eine Stammfunktion von } a(t) := \frac{1}{t+2} \text{ ist } A(t) = \ln|t+2| = \ln(t+2) \Rightarrow$$

$$z_h = C \cdot e^{-\ln t+2} = \frac{C}{t+2}$$

Nun variieren wir die Konstante und erhalten die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$z(t) = \frac{k(t)}{t+2} \Rightarrow \dot{z} = \frac{\dot{k}(t)}{t+2} - \frac{k(t)}{(t+2)^2}$$

$$\Rightarrow 1 = \dot{z} + z \cdot \frac{1}{t+2} = \frac{\dot{k}}{t+2} - \frac{k}{(t+2)^2} + \frac{k}{t+2} \cdot \frac{1}{t+2} \Rightarrow 1 = \frac{\dot{k}}{t+2} \Rightarrow \dot{k} = t+2$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2}t \cdot \frac{t+4}{t+2} + \frac{C}{t+2} = \frac{1}{2}t + \frac{t}{t+2} + \frac{C}{t+2} = \frac{1}{2}t + 1 + \frac{D}{t+2} \quad (D \in \mathbb{R})$$

Die Rücksubstitution liefert eine einfache Bestimmungsgleichung für die allgemeine Lösung y der Ausgangsgleichung:

$$\dot{y} = z = \frac{1}{2}t + 1 + \frac{D}{t+2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}t^2 + t + D \cdot \ln(t+2) + E \quad (D, E \in \mathbb{R})$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt sich die gesuchte Lösung:

$$0 = \dot{y}(0) = z(0) = 1 + \frac{D}{2} \Rightarrow D = -2$$

$$0 = y(0) = D \cdot \ln 2 + E \Rightarrow E = -D \cdot \ln 2 \Rightarrow E = 2 \ln 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4}t^2 + t - 2 \ln(t+2) + 2 \ln 2 = \frac{1}{4}t^2 + t - 2 \ln \left[\frac{1}{2}(t+2) \right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4}t^2 + t - 2 \ln \left(1 + \frac{t}{2} \right) \quad (t > -2)$$

b) In der Differentialgleichung kommt t nicht explizit vor. Es handelt sich also um eine autonome Differentialgleichung. (Für die Ableitung einer Funktion u nach y schreiben wir u'):

$$z(y) = \dot{y} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{d}{dt}z = \frac{d}{dy}z \cdot \frac{dy}{dt} = z' \cdot \dot{y} = z' \cdot z \Rightarrow$$

$$0 = \ddot{y} + \dot{y}^2 \cdot \frac{1}{y+2} = z' \cdot z + z^2 \cdot \frac{1}{y+2} \Rightarrow z' + \frac{z}{y+2} = 0 \quad (z \neq 0)$$

Die Anfangsbedingungen ergeben eine Anfangsbedingung für $z(y)$:

$$y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1 \quad \Rightarrow z(1) = 1$$

Die entstandene Differentialgleichung für z als Funktion von y ist eine homogene lineare Differentialgleichung, die nach bekanntem Muster gelöst wird:

$$a(y) := \frac{1}{y+2} \Rightarrow A(y) = \ln|y+2| \text{ ist eine Stammfunktion von } a(x) \Rightarrow$$

$$z(y) = C \cdot e^{-A(y)} = C \cdot e^{-\ln|y+2|} = \frac{C}{|y+2|} = \frac{D}{y+2} \quad (D \in \mathbb{R})$$

Wir berücksichtigen noch die Anfangsbedingung:

$$1 = z(1) = \frac{D}{1+2} \Rightarrow D = 3 \Rightarrow z(y) = \frac{3}{y+2}$$

Rücksubstitution:

$$\dot{y} = z(y) = \frac{3}{y+2} \Rightarrow (y+2)dy = 3dt \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 + 2y = 3t + C$$

Die Anfangsbedingung legt C fest:

$$1 = y(0) \Rightarrow \frac{1}{2} + 2 = C \Rightarrow C = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$y^2 + 4y = 6t + 5 \Rightarrow (y+2)^2 - 4 = 6t + 5 \Rightarrow y+2 = \pm\sqrt{6t+9} \Rightarrow (y(0) = +1)$$

$$y = -2 + \sqrt{6t+9} = -2 + \sqrt{6\left(t + \frac{3}{2}\right)} \quad \left(t > -\frac{3}{2}\right)$$

Aufgabe 4. Überführen in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y' \cdot e^t = xy'$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = \frac{d}{dt}\dot{y} = \left(\frac{d}{dx}\dot{y}\right) \cdot \frac{dx}{dt} = \left[\frac{d}{dx}(xy')\right] \cdot e^t = [y' + xy''] \cdot x = xy' + x^2y''$$

$$\Rightarrow \quad x^2y'' - 3xy' + 7y = (\ddot{y} - xy') - 3xy' + 7y = \ddot{y} - 4\dot{y} + 7y$$

Wir haben eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für y als Funktion von t erhalten. Die allgemeine Lösung ermitteln wir über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 7y = 0; \quad \lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \quad y = C_1 e^{2t} \cos \sqrt{3}t + C_2 e^{2t} \sin \sqrt{3}t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir die allgemeine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung:

$$y = C_1 x^2 \cos(\sqrt{3} \ln x) + C_2 x^2 \sin(\sqrt{3} \ln x) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 5.

a) Zunächst lösen wir die homogene Gleichung $y' + y \cdot \tan x = 0$. Dazu suchen wir eine Stammfunktion $A(x)$ von $a(x) = \tan(x)$:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \boxed{\begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{array}} = - \int \frac{du}{u} = -\ln |u| + C$$

Wir wählen $C = 0$, also

$$A(x) = -\ln |u| = -\ln |\cos x| \quad \boxed{\cos x > 0 \text{ für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}} = -\ln(\cos x)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist dann

$$y = C \cdot e^{-A(x)} = C \cdot e^{+\ln(\cos x)} = C \cdot \cos x \quad (C \in \mathbb{R})$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmen wir durch Variation der Konstanten. Wir machen also den Ansatz

$$y = z(x) \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = z' \cdot \cos x - z \cdot \sin x.$$

Dies setzen wir in die inhomogene Gleichung ein:

$$z' \cos x - z \sin x + z \underbrace{\cos x}_{\neq 0} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad z' \cos x = 2 \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \quad z' = 2 \cos x \quad \Rightarrow \quad z = 2 \sin x + C$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also

$$y = (2 \sin x + C) \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x + C \cdot \cos x = \sin 2x + C \cdot \cos x \quad (C \in \mathbb{R})$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ist

$$y = \sin 2x + C \cdot \cos x \quad (C \in \mathbb{R})$$

b) Die Funktion y selbst kommt in der Differentialgleichung nicht vor. Daher kann die Ordnung der Gleichung durch die Substitution $z = y'$ reduziert werden. Für z ergibt sich die soeben behandelte Differentialgleichung:

$$z' + z \cdot \tan x = 2 \cos^2 x$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist also

$$z = \sin 2x + C \cdot \cos x.$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$y' = z = \sin 2x + C \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} \cos 2x + C \cdot \sin x + D \quad (C, D \in \mathbb{R}).$$

Dies ist die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems:

$$0 = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} + C \cdot \sin \frac{\pi}{6} + D = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}C + D \quad \Rightarrow D = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}C = \frac{3}{4}$$

$$0 = y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} + C \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + C \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \Rightarrow C = -1$$

Die Lösung des Anfangswertproblems für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ lautet

$$y = -\frac{1}{2} \cos 2x - \sin x + \frac{3}{4}$$

c) Damit die allgemeine Lösung der Gleichung aus Teilaufgabe a, also

$$y = \sin 2x + C \cdot \cos x \quad (C \in \mathbb{R})$$

auch die Differentialgleichung $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = s(x)$ löst, muss nach dem Superpositionsprinzip $y = C \cdot \cos x$ die homogene Differentialgleichung $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ lösen.

$\Rightarrow e^{ix}$ ist eine komplexe Lösung der homogenen Differentialgleichung

$\Rightarrow i$ und $-i$ sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + a\lambda + b$

\Rightarrow Das charakteristische Polynom ist $(\lambda - i)(\lambda + i) = \lambda^2 + 1$

\Rightarrow Die homogene Differentialgleichung lautet $y'' + y = 0$

\Rightarrow Die inhomogene Differentialgleichung hat die Form $y'' + y = s(x)$

Wir setzen jetzt die gewünschte Lösung ein:

$$y = \sin 2x + C \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \cos 2x - C \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad y'' = -4 \sin 2x - C \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \quad s(x) = y'' + y = (-4 \sin 2x - C \cdot \cos 2x) + (\sin 2x + C \cdot \cos x) = -3 \sin 2x$$

Die gesuchte lineare Differentialgleichung lautet

$$y'' + y = -\sin 2x$$

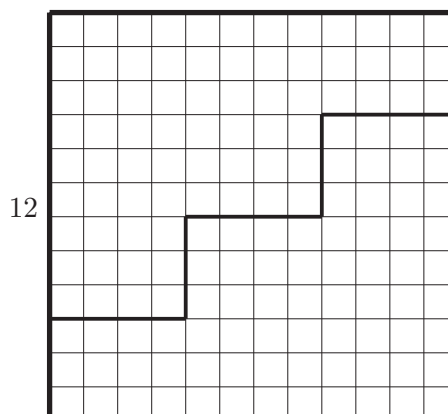
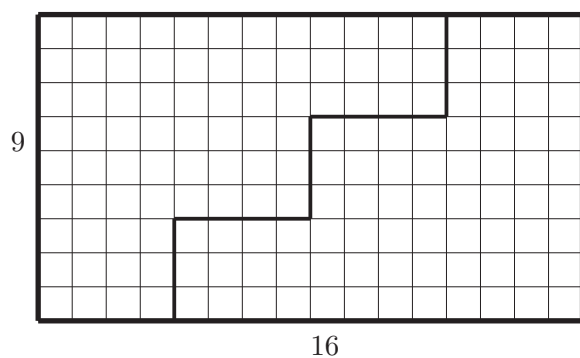
Sie hat die allgemeine Lösung

$$y = \sin 2x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

welche offenbar die allgemeine Lösung der Gleichung aus Teilaufgabe a umfasst.

Aufgabe 6. Die Aufgabe stammt aus dem Buch Mathematische Olympiadeaufgaben aus der UdSSR von Arthur Engel, erschienen im Ernst Klett Verlag Stuttgart (1972).

a) Die beiden Figuren zeigen die Lösung. Die kürzere Seite (9) wird in 3, die längere (16) in 4 Teile zerlegt.



b) Im allgemeinen Fall wird die kürzere Seite (b) in n Teile, die längere (a) in $(n + 1)$ Teile zerlegt. Damit sich durch das Umlegen ein Quadrat ergibt, muss gelten:

$$b + \frac{b}{n} = a - \frac{a}{n+1} \Leftrightarrow b \cdot \frac{n+1}{n} = a \cdot \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

Die Seiten müssen sich also zueinander verhalten wie die Quadrate aufeinanderfolgender ganzer Zahlen. Das einfachste Beispiel (entartete Treppe) ist $a = 4b$.