

Thema: Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Aufgabe 1. Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$y' + 2xy = xe^{-x^2},$$

welche der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ genügt.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}, \quad y(1) = 1.$$

Aufgabe 3. WS 04/05, Höhere Mathematik 1 und 2 (55 Punkte)

Die Dgl erster Ordnung D_1

$$\frac{1}{3} \cdot y' + 2 \cdot y = s(x)$$

und die Dgl zweiter Ordnung D_2

$$\frac{1}{3} \cdot y'' + 2 \cdot y' = s(x)$$

sollen für verschiedene Störglieder $s(x)$ untersucht werden.

a) Bestimmen Sie für das Störglied $s_1(x) = e^{3x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung D_1 . Berechnen Sie mittels einer geeigneten Substitution hieraus die allgemeine Lösung von D_2 für dieses Störglied $s_1(x)$. Geben Sie die Lösung des zu D_2 gehörenden Anfangswertproblems $y(0) = y'(0) = 0$ an.

b) Wie muss das Störglied gewählt werden, damit $e^{3x} \cdot \cos 6x$ eine Lösung der Differentialgleichung D_1 ist? Wie lautet die allgemeine Lösung der Gleichung D_1 für dieses Störglied $s_2(x)$? Für welches Störglied $s_3(x)$ ist $e^{3x} \cdot (5 - 3 \cos 6x)$ eine Lösung der Differentialgleichung D_1 ?

c) Für welches $\gamma \in \mathbb{R}$ erzeugt das Störglied $s_4(x) = x^2 \cdot e^{\gamma x}$ bei der Differentialgleichung D_1 Resonanz? Durch welchen Ansatz könnte in diesem Falle eine Lösung gefunden

werden? Für welche γ erzeugt $s_4(x)$ bei D_2 Resonanz?

Achtung: Es ist lediglich der Ansatz gefragt. Die Lösung soll nicht ermittelt werden.

d) Bestimmen Sie für das Störglied $s_5(x) = x^{86} \cdot e^{-6x}$ die allgemeine Lösung von D_1 durch Variation der Konstanten. Stellen Sie die Lösung mit $y(0) = 0$ als Potenzreihe um 0 dar. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt diese Potenzreihen-Darstellung? Welchen Konvergenzradius hat die Reihe?

e) Ermitteln Sie für das Störglied $s_5(x) = x^{86} \cdot e^{-6x}$ die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung D_2 mit $y(0) = 2005$ und $y'(0) = 0$ in Form einer Potenzreihe. Lesen Sie aus dieser Potenzreihe die 77-te Ableitung $y^{(77)}(0)$ und die 88-te Ableitung $y^{(88)}(0)$ dieser Lösung ab. Zeigen Sie, dass $y^{(88)}(0) = 3 \cdot 86!$.

Thema: Trennung der Veränderlichen

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

a) $y' = e^{x+y}$

b) $y' = e^y \cdot \sin x$

welche der Anfangsbedingung $y(0)=0$ genügt. Geben Sie ihr maximales Existenzintervall an. Für welche $y_0 \in \mathbb{R}$ gibt es eine globale (das heißt auf ganz \mathbb{R} erklärte) Lösung der Differentialgleichung mit $y(0) = y_0$?

Aufgabe 5. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems mit folgender Anfangsbedingung:

a) $y(0)=1$

b) $y(1)=1$

c) $y(1)=-1$