Aufgabe 1. Wir ermitteln zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

$$y' + 2xy = 0$$

$$a(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad \int a(x)dx = \int 2xdx = x^2 + C$$

$$\Rightarrow \quad A(x) = x^2 \quad \text{ist eine Stammfunktion von } a(x)$$

$$\Rightarrow \quad y = C \cdot e^{-A(x)} = C \cdot e^{-x^2} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ermitteln wir aus dieser allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung durch Variation der Konstanten:

$$y = z(x) \cdot e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = z'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xz(x) \cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad xe^{-x^2} = y' + 2xy = (z'(x) \cdot e^{-x^2} \underbrace{-2xz(x) \cdot e^{-x^2}) + 2x \cdot z(x) \cdot e^{-x^2}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad z' = x \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + C \cdot e^{-x^2} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Die Anfangsbedingung gestattet die Berechnung der Integrationskonstanten C:

$$1 = y(0) = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y = \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right) e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2. Wir ermitteln zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0 \qquad \Rightarrow \quad a(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \int a(x)dx = \int \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln\left|1+x^2\right| + C = \ln\left(1+x^2\right) + C$$

$$\Rightarrow \quad A(x) = \ln\left(1+x^2\right) \quad \text{ist eine Stammfunktion von } a(x)$$

$$\Rightarrow \quad y = C \cdot e^{-A(x)} = C \cdot e^{-\ln\left(1+x^2\right)} = \frac{C}{e^{\ln(1+x^2)}} = \frac{C}{1+x^2} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ermitteln wir aus dieser allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung durch Variation der Konstanten:

$$y = \frac{z(x)}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z'(x)}{1+x^2} - \frac{2x \cdot z(x)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x\,(1+x^2)} = y' + \frac{2x}{1+x^2}y = (\frac{z'(x)}{1+x^2} \underbrace{-\frac{2x \cdot z(x)}{(1+x^2)^2}) + \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{z(x)}{1+x^2}}_{=0} = \frac{z'(x)}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad z' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad z = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\ln|x| + C}{1+x^2} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Die Lösungen sind für $x = 0$ nicht definiert. Die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ zeigt, dass wir uns auf den Bereich $x > 0$ beschränken müssen. Die Anfangsbedingung gestattet zudem die Berechnung der Integrationskonstanten C:

$$1 = y(1) = \frac{0+C}{1+1} = \frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y = \frac{2 + \ln x}{1+x^2} \quad (x > 0).$$

Aufgabe 3.
a) Allgemeine Lösung der zu D_1 gehörenden homogenen Gleichung:

$$\frac{1}{3} \cdot \lambda + \quad 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -6$$

$$y = C \cdot e^{-6x} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung D_1 für $s_1(x) = e^{3x}$:

$$y = a \cdot e^{3x} \quad \Rightarrow \quad y' = 3a \cdot e^{3x}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3a \cdot e^{3x} + 2 \cdot a \cdot e^{3x} = e^{3x} \quad \Rightarrow \quad a + 2a = 1 \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}$$

Allgemeine Lösung der Gleichung D_1:

$$y = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} + C \cdot e^{-6x} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Die Gleichung D_2 ist reduzierbar. Die Substitution $z = y'$ führt zur Gleichung D_1 für z. Integration ergibt die allgemeine Lösung von D_2:

$$y' = z = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} + C \cdot e^{-6x} \quad \Rightarrow \quad y = \int z\,dx = \frac{1}{3} \int e^{3x}\,dx + C \int e^{-6x}\,dx$$

Allgemeine Lösung der Gleichung D_2:

$$y = \frac{1}{9} \cdot e^{3x} - \frac{C}{6} \cdot e^{-6x} + D \quad (C, D \in \mathbb{R})$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen $0 = y'(0) = z(0)$ und $0 = y(0)$:

$$0 = \frac{1}{3} + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{3}$$

$$0 = \frac{1}{9} - \frac{C}{6} + D = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + D = \frac{2}{18} + \frac{1}{18} + D = \frac{3}{18} + D \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{1}{6}$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y = \frac{1}{9} \cdot e^{3x} + \frac{1}{18} \cdot e^{-6x} - \frac{1}{6} \quad (x \in \mathbb{R})$$

b) Vorbereitung:

$$y = e^{3x} \cdot \cos 6x \quad \Rightarrow \quad y' = 3 \cdot e^{3x} \cdot \cos 6x - 6 \cdot e^{3x} \cdot \sin 6x$$

Das gesuchte Störglied $s_2(x)$ erhält man durch Einsetzen der Lösung $e^{3x} \cdot \cos 6x$ in die Differentialgleichung D_1:

$$s_2(x) = \frac{1}{3}(3 \cdot e^{3x} \cdot \cos 6x - 6 \cdot e^{3x} \cdot \sin 6x) + 2(e^{3x} \cdot \cos 6x)$$

$$= 3 \cdot e^{3x} \cdot \cos 6x - 2 \cdot e^{3x} \cdot \sin 6x = e^{3x} \cdot (3\cos 6x - 2\sin 6x)$$

Die zugehörige allgemeine Lösung der Gleichung D_1 ergibt sich durch Superposition:

$$y = e^{3x} \cdot \cos 6x + C \cdot e^{-6x} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Das Superpositionsprinzip gestattet auch die Bestimmung des Störglieds $s_3(x)$:

$$e^{3x} \cdot (5 - 3\cos 6x) = 15 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - 3 \cdot e^{3x} \cos 6x$$

$$s_3(x) = 15 \cdot s_1(x) - 3 \cdot s_2(x) = 15 \cdot e^{3x} - 3 \cdot e^{3x} \cdot (3\cos 6x - 2\sin 6x)$$

$$s_3(x) = 3e^{3x} \cdot (5 - 3\cos 6x + 2\sin 6x)$$

c) Resonanz liegt vor, wenn γ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, bei D_1 also für $\gamma = -6$. Dies ist einfache Resonanz. Ein funktionierender Ansatz wäre also

$$y = x^1 \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot e^{-6x} = (a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x) \cdot e^{-6x}$$

Das charakteristische Polynom von D_2 ist

$$\frac{1}{3} \cdot \lambda^2 + 2 \cdot \lambda = \lambda \cdot (\frac{1}{3}\lambda + 2)$$

Bei D_2 liegt Resonanz demnach für $\gamma = 0$ und $\gamma = -6$ vor.

d) Variation der Konstanten:

$$y = c(x) \cdot e^{-6x} \quad \Rightarrow \quad y' = c'(x) \cdot e^{-6x} - 6c(x) \cdot e^{-6x}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{3}c'(x) \cdot e^{-6x} - 2c(x) \cdot e^{-6x} + 2c(x) \cdot e^{-6x} = x^{86} \cdot e^{-6x}$$

$$\Leftrightarrow \quad c'(x) = 3x^{86} \quad \Leftrightarrow \quad c(x) = \frac{3}{87}x^{87} + C \quad \Leftrightarrow \quad c(x) = \frac{1}{29}x^{87} + C$$

Allgemeine Lösung von D_1 für $s_5(x)$:

$$y = (\frac{1}{29}x^{87} + C) \cdot e^{-6x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ wird erfüllt für $C = 0$. Die zugehörige Potenzreihe ergibt sich aus der Potenzreihe für die e-Funktion:

$$y = \frac{1}{29}x^{87} \cdot e^{-6x} = \frac{1}{29}x^{87} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^n}{29n!} \cdot x^{n+87}$$

Dies ist also die Potenzreihe für die Lösung mit $y(0) = 0$. Da die e-Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ durch ihre Reihe dargestellt wird, gilt dies auch für unsere Lösung. Der Konvergenzradius der Reihe ist daher ∞.

e) Die Substitution $z = y'$ führt auf das in der vorigen Teilaufgabe gelöste Anfangswertproblem für z, also

$$y' = z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^n}{29n!} \cdot x^{n+87}$$

Im Innern des Konvergenz-Intervalls - hier also für alle $x \in \mathbb{R}$ - darf gliedweise integriert werden:

$$y = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^n}{29n!} \cdot x^{n+87} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{(-6)^n}{29n!} \cdot x^{n+87}\, dx \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^n}{29(n+88)n!} \cdot x^{n+88} + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Wegen $y(0) = 2005$ ist $C = 2005$, also

$$y = 2005 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^n}{29(n+88)n!} \cdot x^{n+88}$$

Dies löst die Differentialgleichung für alle $x \in \mathbb{R}$. Ableitungen an der Entwicklungsstelle 0 ergeben sich aus dem jeweiligen Koeffizienten a_k der Reihe:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$$

$$f^{77}(0) = 0 \ , \quad f^{88}(0) = 88! \cdot \frac{6^0}{29 \cdot 88 \cdot 0!} = \frac{87!}{29} = 3 \cdot 86!$$

Dieses Entnehmen der Ableitungen aus den Koeffizienten der Reihe ist möglich, weil der Konvergenzradius der Reihe nicht 0 ist.

Aufgabe 4. a) Trennung der Veränderlichen:

$$y' = e^{x+y} = e^x \cdot e^y \Rightarrow e^{-y}dy = e^x dx \Rightarrow -e^{-y} = e^x + C \Rightarrow -y = \ln(-e^x - C)$$

$$\Rightarrow y = -\ln(D - e^x) \qquad (D \in \mathbb{R})$$

Einsetzen der Anfangsbedingung:

$$0 = -\ln(D-1) \Rightarrow D - 1 = 1 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow y = -ln(2 - e^x) \qquad (-\infty < x < \ln 2)$$

Dies ist die gesuchte Lösung mit dem maximalen Existenzintervall. Eine globale Lösung gäbe es nur, wenn $D - e^x > 0$ für alle x. Dies ist aber nicht möglich, da die e-Funktion unbeschränkt ist.

b) Trennung der Veränderlichen:

$$e^{-y}dy = \sin x dx \Rightarrow -e^{-y} = -\cos x + C \Rightarrow -y = \ln(\cos x - C)$$

$$\Rightarrow y = -\ln(D + \cos x) \qquad (D \in \mathbb{R})$$

Einsetzen der Anfangsbedingung:

$$0 = -\ln(D+1) \Rightarrow D + 1 = 1 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow y = -\ln\cos x \qquad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$$

Dies ist die gesuchte Lösung mit dem maximalen Existenzintervall. Eine globale Lösung gibt es, wenn $D + \cos x > 0$ für alle x. Dies ist genau für $D > 1$ der Fall. Dies heisst

$$y_0 = y(0) = -\ln(D+1) < -\ln 2.$$

Aufgabe 5. Wir ermitteln zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch Trennung der Veränderlichen:

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow y \cdot dy = -x \cdot dx \Rightarrow \int y \cdot dy = -\int x \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\Rightarrow y^2 = -x^2 + D \quad (D \in \mathbb{R})$$

(Die Gleichung macht nur für $D > 0$ Sinn. In diesem Falle stellt die Gleichung eine Kreis um den Ursprung dar.) Die Auflösung nach y ist nicht eindeutig, daher lassen wir die allgemeine Lösung in dieser impliziten Form stehen.

a) Einsetzen der Anfansgbedinung ergibt $1^2 = -0^2 + D \Rightarrow D = 1$. Für die Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir

$$y^2 = -x^2 + 1 \Rightarrow y = +\sqrt{1 - x^2} \quad (|x| < 1)$$

Das Vorzeichen der Wurzel ergibt sich hierbei aus der Anfangsbedingung $y(0) = +1$. Beim Definitionsbereich der Lösung dürfen $x = -1$ und $x = +1$ nicht mehr zugelassen werden, da dort $y = 0$ wäre und die Differentialgleichung hierfür nicht definiert ist.

b) Einsetzen der Anfangsbedinung ergibt $1^2 = -1^2 + D \quad \Rightarrow D = 2$. Für die Lösungen des Anfangswertproblems erhalten wir

$$y^2 = -x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad y = +\sqrt{2 - x^2} \quad (|x| < \sqrt{2}).$$

c) Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt $(-1)^2 = -1^2 + D \quad \Rightarrow \quad D = 2$. Für die Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir

$$y^2 = -x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt{2 - x^2} \quad (|x| < \sqrt{2}).$$