

**Thema: Zahlenreihen**

**Aufgabe 1.** Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  konvergiert die Reihe  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{\alpha} n}$ ?

**Hinweis:** Verwenden Sie das Integralkriterium. Zeigen Sie hierzu zunächst, dass die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^{\alpha} x}$  für genügend große Werte von  $x$  monoton fallend ist.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass die Reihe  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$  konvergiert und berechnen Sie ihren Wert.

**Hinweis:** Zerlegen Sie die Reihenglieder in Partialbrüche.

**Zum Knobeln**

**Aufgabe 3.** Ein unbegrenzter Vorrat an Treibstoff befindet sich am Rande einer 800 Meilen breiten Wüste, innerhalb derer keine Treibstoffquelle ist. Ein Lastwagen kann genug Treibstoff mit sich führen, um 500 Meilen zurückzulegen (dies nennen wir eine Ladung) und er kann auch an jedem Punkt der Wüste eine eigene Tankstelle aufbauen. Die Treibstoffmenge in diesen Tankstellen darf beliebig groß sein und es wird vorausgesetzt, dass kein Treibstoff durch Verdunsten verloren geht.

- Wie viele (volle) Ladungen benötigt der Lastwagen, um die Wüste zu durchqueren?
- Sind der Breite der Wüste, die der Lastwagen durchqueren kann, Grenzen gesetzt?

**Thema: Potenzreihen**

**Aufgabe 4.** Für welche Werte von  $x$  konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a)  $\sum_{n=2}^{\infty} (x-3)^n$

b)  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j-2}{j!} (x+\pi)^j$

c)  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+3}{j^3+2} x^j$

d)  $1 - \frac{17}{13}x$

**Aufgabe 5.** Bestimmen Sie die Taylor-Reihen (mit Entwicklungspunkt 0) der folgenden Funktionen. Geben Sie an, für welche  $x$  die Reihe gegen die jeweilige Funktion konvergiert.

a)  $\arctan x$

b)  $(1-x)^{-4}$

c)  $(1-x)^4$

d)  $\sin x^2 + \cos x^2$

**Aufgabe 6.** Ermitteln Sie im Intervall  $(-2, 0)$  eine geschlossene Darstellung für die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( n + \frac{1}{n} \right) \cdot (x+1)^n$$

**Aufgabe 7.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

auf 2 Stellen genau, indem Sie den Integranden in eine Potenzreihe entwickeln.

**Hinweis:** Geben Sie zunächst das zugehörige unbestimmte Integral als Potenzreihe an. Leiten Sie hieraus eine Zahlenreihe für das bestimmte Integral ab. Prüfen Sie, wieviel Glieder dieser Reihe für die geforderte Genauigkeit notwendig sind.