Aufgabe 1. Wir wollen die Untersuchung auf Konvergenz mit Hilfe des Integralkriteriums vornehmen. Wir setzen für $x \geq 2$

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^{\alpha} x}$$

Offenbar ist $f(x) \geq 0$ für alle diese x und

$$f'(x) = \frac{-1}{(x \cdot \ln^{\alpha} x)^2} \cdot \left(\ln^{\alpha} x + x \cdot \alpha \cdot \ln^{\alpha-1} x \cdot \frac{1}{x} \right) = -\frac{\ln^{\alpha-1} x}{(x \cdot \ln^{\alpha} x)^2} \cdot (\ln x + \alpha)$$

Für genügend große Werte von x ist $(\ln x + \alpha)$ auch bei negativem α positiv. $f'(x)$ ist dann negativ, $f(x)$ also (streng) monoton fallend. Damit ist das Integralkriterium anwendbar:
Die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^{\alpha} x}$ konvergiert genau dann, wenn dies das uneigentliche Integral $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^{\alpha} x}$ tut.

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln^{\alpha} x} = \boxed{\begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\, dx \end{array}} = \int \frac{du}{u^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} u^{1-\alpha} + C = \frac{1}{1-\alpha} \ln^{1-\alpha} x + C & \alpha \neq 1 \\ \ln |u| + C = \ln |\ln x| + C & \alpha = 1 \end{cases},$$

also

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^{\alpha} x} = \begin{cases} \infty & \alpha < 1 \\ \infty & \alpha = 1 \\ -\frac{1}{1-\alpha} \ln^{1-\alpha} 2 & \alpha > 1 \end{cases}$$

Das uneigentliche Integral und damit die vorgelegte Reihe konvergiert also genau für $\alpha > 1$.

Aufgabe 2. Für die Teilsummen gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

Daher ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Aufgabe 3. Die Aufgabe wurde dem Buch "More Mathematical Puzzles and Diversions" von Martin Gardner (Penguin Books, 1961) entnommen. Auch einige Publikationen beschäftigen sich mit diesem Logistik-Problem.

a) Mit einer Ladung kommt der Lastwagen offenbar genau 500 Meilen weit, was wir eine Einheit nennen. Zurückzulegen sind 800 Meilen, also $1,6$ Einheiten.

- Zwei Ladungen bringen den Laster maximal 1 und $\frac{1}{3}$ Einheiten weit. Dies wird erreicht durch eine Tankstelle, $\frac{1}{3}$ Einheiten vom Start entfernt. Der Lastwagen hinterläßt dort $\frac{1}{3}$ seiner ersten Ladung und fährt zum Volltanken zurück. Von der zweiten Ladung hat er gerade $\frac{1}{3}$ verbraucht, wenn er wieder zur Tankstelle kommt. Er kann dort also volltanken und kommt noch eine Einheit weit.

- Mit drei Ladungen kommt er $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ Einheiten (etwa $1,53$) weit: Er richtet zwei Tankstellen ein. Die erste $\frac{1}{5}$ Einheiten vom Start, die zweite $\frac{1}{3}$ Einheiten weiter. Um von der ersten Tankstelle noch $(1 + \frac{1}{3})$ Einheiten weit zu kommen braucht er wie gesehen 2 Ladungen. Vollgetankt am Start aufgebrochen, hat er an der ersten Tankstelle noch $\frac{4}{5}$ Ladungen im Tank. Die Tankstelle muss also mit $\frac{6}{5}$ Ladungen gefüllt sein. Dies kann durch zweimaliges Anfahren der Tankstelle erreicht werden.

- Vier Ladungen bringen den Laster $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ Einheiten (etwa $1,67$) weit, die Wüste ist durchquert. Die erste Tankstelle wird $\frac{1}{7}$ Einheiten vom Start eingerichtet. Um von dort die restlichen $(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5})$ Einheiten zurückzulegen sind - wie gesehen - drei Ladungen nötig. Vom Start kommend hat er an der ersten Tankstelle noch $\frac{6}{7}$ Ladungen im Tank, die Tankstelle muß also $3 - \frac{6}{7} = \frac{15}{7}$ Ladungen enthalten. Dies kann durch dreimaliges Anfahren der Tankstelle erreicht werden.

- Für das Durchqueren der 800 Meilen breiten Wüste sind 4 Ladungen nötig.

b) Obige Überlegungen können verallgemeinert werden: Mit n Ladungen kommt der Laster $1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$ Einheiten weit. Dies kann mit vollständiger Induktion bewiesen werden.

- Für $n = 1$ ist die Aussage richtig.

- Wir setzen voraus, die Behauptung sei richtig für eine Zahl n, das heißt: Mit n Ladungen kommt der Laster $1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$ Einheiten weit. Zu zeigen ist, dass die Behauptung auch für $(n + 1)$ gilt. Dies heißt: Mit $(n + 1)$ Ladungen kommt der Laster $1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n+1}$ Einheiten weit.

- Wir richten $\frac{1}{2n+1}$ Einheiten vom Start die erste Tankstelle ein. Um von dort die restliche Strecke zurückzulegen, werden (unsere Voraussetzung) n Ladungen benötigt. Vom Start kommend hat der Lastwagen an der ersten Tankstelle noch $\frac{2n}{2n+1}$ Ladungen im Tank. Die Tankstelle muss folglich $n - \frac{2n}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{2n+1}$ Ladungen enthalten. Dies kann durch n-maliges Anfahren erreicht werden. Die Strecke vom Startpunkt zur ersten Tankstelle oder umgekehrt wird insgesamt $(2n + 1)$ mal zurückgelegt. Dabei wird genau eine Ladung Treibstoff verbraucht. Die Gesamtstrecke kann also mit $(n + 1)$ Ladungen überbrückt werden. Dies war zu zeigen.

- Die maximal zu überbrückende Strecke ist durch die unendliche Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$ gegeben. Die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n+1} &= \\
= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) &= \\
= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) &>
\end{aligned}
$$

$$> \quad \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

zeigt, dass diese Reihe wie die harmonische Reihe divergiert. Damit kann eine Wüste beliebiger Breite durchquert werden. (Allerdings wächst die Anzahl der benötigten Ladungen dabei exponentiell.)

Aufgabe 4.
a) Es handelt sich um eine geometrische Reihe. Diese hat den Konvergenzradius 1 und divergiert an beiden Randpunkten. Die vorgelegte Reihe konvergiert also (genau) für $2 < x < 4$.

b) Wir berechnen den Konvergenzradius R mit dem Quotientenkriterium:

$$\alpha := \lim_{j\to\infty}\left|\frac{\frac{j+1-2}{(j+1)!}}{\frac{j-2}{j!}}\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\frac{j-1}{(j-2)\,(j+1)}\right| = 0 \quad\Rightarrow\quad R=\frac{1}{\alpha}=\infty$$

Die Reihe konvergiert also für alle reellen x.

c) Wir berechnen den Konvergenzradius R mit dem Quotientenkriterium:

$$\alpha := \lim_{j\to\infty}\left|\frac{\frac{j+1+3}{(j+1)^3+2}}{\frac{j+3}{j^3+2}}\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\frac{j+4}{j+3}\cdot\frac{j^3+2}{(j+1)^3+2}\right| = 1 \quad\Rightarrow\quad R=\frac{1}{\alpha}=1$$

An den beiden Randpunkten -1 und $+1$ konvergiert die Reihe. (Der Grad des Nenners ist um 2 größer als der des Zählers.) Mit dem Vergleichskriterium kann dies exakt nachgewiesen werden:

$$\left|\frac{j+3}{j^3+2}\cdot x^j\right| \underset{\substack{\uparrow\\ x=\pm1}}{=} \frac{j+3}{j^3+2} \leq \frac{j+3}{j^3} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{für } j\geq 3}}{\leq} \frac{2j}{j^3} = 2\frac{1}{j^2}$$

Die aus den rechts stehenden Gliedern gebildete Reihe ist eine konvergente Majorante. Insgesamt ergibt sich, dass die vorgelegte Reihe (genau) für $-1 \leq x \leq +1$ konvergiert.

d) Es handelt sich um eine abbrechende Reihe. Diese konvergiert für alle reellen x.

Aufgabe 5.
a) Wir bestimmen zunächst eine Potenzreihe für die Ableitung. Dabei gehen wir von der geometrischen Reihe aus:

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{j=0}^{\infty} q^j \qquad \text{genau für } q \in (-1,+1)$$

Mit $q = -x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\, x^{2j} \qquad \text{genau für } x \in (-1,+1)$$

Durch unbestimmtes Integrieren ergibt sich

$$\arctan x + C_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \, x^{2j} \, dx = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \int x^{2j} \, dx$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \, \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + C_2$$

Einsetzen von $x = 0$ zeigt, dass die beiden Integrations-Konstanten gleich sind. Daher gilt

$$\arctan x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \, \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \qquad \text{für} \quad x \in (-1, +1)$$

Der Konvergenzradius bleibt beim Integrieren (genau) gleich. Getrennt zu untersuchen sind jedoch die Randpunkte, in unserem Falle -1 und +1. Die beiden zugehörigen Zahlenreihen sind alternierend, die Beträge der Reihenglieder bilden eine monotone Nullfolge. Nach Leibniz sind die beiden Reihen konvergent. Der Abelsche Grenzwertsatz ergibt, dass

$$\arctan x \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \, \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \qquad \text{(genau) für } x \in [-1, +1]$$

b) Wir gehen von der geometrischen Reihe aus und leiten die zugehörige Summenformel mehrfach ab.

$$f(x) \quad := \quad \frac{1}{1-x} \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

$$f'(x) \quad = \quad \frac{1}{(1-x)^2} \quad = \quad \sum_{j=1}^{\infty} j x^{j-1}$$

$$f''(x) \quad = \quad \frac{2}{(1-x)^3} \quad = \quad \sum_{j=2}^{\infty} j \, (j-1) \, x^{j-2}$$

$$f'''(x) \quad = \quad \frac{6}{(1-x)^4} \quad = \quad \sum_{j=3}^{\infty} j \, (j-1) \, (j-2) \, x^{j-3}$$

Mit $n = j - 3$

$$\frac{1}{(1-x)^4} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)}{6} \; x^n$$

Beim Ableiten bleibt der Konvergenzradius gleich. Die Reihe hat also - wie die geometrische Reihe, von der wir ausgegangen sind - den Konvergenzradius $R = 1$. Zu untersuchen bleiben die Randpunkte, $x = -1$ und $x = +1$. Die Glieder der zugehörigen Zahlenreihen bilden aber nicht einmal ein Nullfolge. An Konvergenz der Reihe ist also nicht zu denken. Wir haben damit erhalten:

$$\frac{1}{(1-x)^4} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)}{6} \; x^n \qquad \text{(genau) für } x \in (-1, +1)$$

c) Die Funktion ist ein Polynom. Die zugehörige Taylor-Reihe bricht ab, "konvergiert" also für alle x. Die Bestimmung der Reihe geschieht am einfachsten durch Ausmultiplizieren:

$$(1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$$

d) Die Taylor-Reihe ergibt sich als Kombination der Reihen von Sinus und Cosinus:

$$\sin u + \cos u = \left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - + \ldots\right) + \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - + \ldots\right) =$$

$$= 1 + u - \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} - - + + \ldots$$

$$\sin x^2 + \cos x^2 = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{1!} - \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} - - + + \ldots \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 6. Wir schreiben die Reihe als Summe zweier einfacherer Potenzreihen:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) \cdot (x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (x+1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (x+1)^n$$

$$= (x+1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (x+1)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (x+1)^n$$

Die zweite dieser Reihen kann durch Differenzieren in eine geschlossene Form überführt werden:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (x+1)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^{n-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (x+1)^j = \frac{1}{1-(x+1)} = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (x+1)^n = -\ln|x| + C$$

Der Vergleich bei $x = -1$ ergibt $C = 0$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (x+1)^n = -\ln(-x)$$

Bei der ersten Reihe hilft Integration:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (x+1)^{n-1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^n + C = \frac{1}{1-(x+1)} - 1 + C = -\frac{1}{x} - 1 + C$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (x+1)^{n-1} = \frac{1}{x^2}$$

Insgesamt ergibt sich für alle x mit $-2 < x < 0$:

$$f(x) = (x+1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (x+1)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (x+1)^n = (x+1) \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) - \ln(-x)$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \ln(-x)$$

Aufgabe 7.
Für das unbestimmte Integral erhält man

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \quad = \quad \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots\right) dx \quad =$$

$$= \quad \int \left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \ldots\right) dx \quad = \quad \left(\frac{x^1}{1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - + \ldots\right) + C$$

Daraus ergibt sich für das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \quad = \quad \left[\frac{x^1}{1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - + \ldots\right]_0^1 \quad =$$

$$= \quad \frac{1}{1 \cdot 1!} - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - + \ldots \quad = \quad 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + - \ldots$$

Dies ist eine alternierende Reihe mit betragsmäßig monoton fallenden Gliedern. Bei solchen Reihen ist der Fehler bei der Annäherung durch eine Teilsumme kleiner als der Betrag des nächsten Gliedes. Für die geforderte Genauigkeit genügen hier bereits zwei Glieder:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \left(1 - \frac{1}{18}\right) \pm \frac{1}{600} = 0.944 \pm 0.002 \approx 0.94$$