Aufgabe 1.

a) Der Integrand ist echt gebrochen rational. Daher führt eine Partialbruchzerlegung zum Ziel. Der Nenner hat die beiden Nullstellen -1 und 2 (im Zweifel Ermittlung mit der Mitternachtsformel). Der Ansatz lautet also

$$\frac{x-5}{x^2-x-2} = \frac{x-5}{(x+1)(x-2)} \overset{!}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\Rightarrow \quad x-5 = A(x-2) + B(x+1) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Da letztere Formel auch für $x=-1$ und $x=2$ gilt, können A und B durch Einsetzen dieser Werte bestimmt werden:

$$x=-1: \quad -6 = A \cdot (-3) \quad \Rightarrow A = 2$$

$$x=2: \quad -3 = B \cdot 3 \quad \Rightarrow B = -1$$

Damit kann das Integral berechnet werden:

$$\int \frac{x-5}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{-1}{x-2}\,dx = 2\ln|x+1| - \ln|x-2| + C$$
$$(x \neq -1, \quad x \neq 2)$$

b) Der Integrand ist echt gebrochen rational, die Integration gelingt mit Partialbruchzerlegung.

$$\frac{1}{(4x^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{16}}{(x^2-\frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{1}{16}}{(x-\frac{1}{2})^2(x+\frac{1}{2})^2} \overset{!}{=} \frac{E}{x-\frac{1}{2}} + \frac{F}{(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{G}{x+\frac{1}{2}} + \frac{H}{(x+\frac{1}{2})^2}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt deshalb

$$\frac{1}{16} = E(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})^2 + F(x+\frac{1}{2})^2 + G(x-\frac{1}{2})^2(x+\frac{1}{2}) + H(x-\frac{1}{2})^2$$

Hieraus wollen wir 4 lineare Gleichungen zur Bestimmung der Parameter E bis H ableiten. Eine der Gleichungen gewinnen wir durch Vergleich der Koeffizienten von x^3. Die anderen Gleichungen erhalten wir durch Einsetzen geeigneter Werte für x:

$$x = -\frac{1}{2}: \quad \frac{1}{16} = H \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{16}$$

$$x = \frac{1}{2}: \quad \frac{1}{16} = F \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{16}$$

$$\text{Koeffizient von } x^3: \quad 0 = E + G \quad \Rightarrow \quad E = -G$$

$$x = 0: \quad \frac{1}{16} = E \cdot (-\frac{1}{8}) + F \cdot \frac{1}{4} + G \cdot \frac{1}{8} + H \cdot \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 1 = -2E + 4F + 2G + 4H$$

Einsetzen der ersten drei Gleichungen in die letzte liefert

$$1 = +2G + \frac{1}{4} + 2G + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{1}{8}$$

Die Partialbruchzerlegung ist folglich

$$\frac{1}{(4x^2-1)^2} = \frac{-\frac{1}{8}}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{16}}{(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{\frac{1}{8}}{x+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{16}}{(x+\frac{1}{2})^2}$$

Damit kann das unbestimmte Integral ermittelt werden (für $x \neq \pm\frac{1}{2}$):

$$\int \frac{dx}{(4x^2-1)^2} = -\frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{8}\cdot \ln|x-\frac{1}{2}| + \frac{1}{16}\cdot\frac{-1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\cdot\ln|x+\frac{1}{2}| + \frac{1}{16}\cdot\frac{-1}{x+\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{8}\ln|x-\frac{1}{2}| - \frac{1}{16x-8} + \frac{1}{8}\ln|x+\frac{1}{2}| - \frac{1}{16x+8} + C$$

c) Der Integrand ist echt gebrochen rational. Wir zerlegen ihn in Partialbrüche. Dazu ermitteln wir zunächst die Nullstellen des Nenners:

$$x^3+2x^2+5x = x(x^2+2x+5) \quad\Rightarrow\quad x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} = -1\pm 2i$$

$$x^3+2x^2+5x = x(x^2+2x+5) = x(x+1-2i)(x+1+2i)$$

Dies führt zum Ansatz

$$\frac{5}{x^3+2x^2+5x} = \frac{5}{x\,(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

$$\Rightarrow \quad 5 = A\left(x^2+2x+5\right) + (Bx+C)\,x$$

$$\Rightarrow \quad 5 = x^2\cdot(A+B) + x\cdot(2A+C) + 5A$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{array}{lllll} 0 = A+B & & & & B=-1 \\ 0 = 2A+C & \Rightarrow & & \Rightarrow & C=-2 \\ 5 = 5A & & A=1 & & \end{array}$$

Das Integral kann jetzt berechnet werden:

$$\int \frac{5}{x^3+2x^2+5x}\,dx = \int\frac{dx}{x} - \int\frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \ln|x| - \int\frac{(x+1)+1}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$= \ln|x| - \int\frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx - \int\frac{dx}{x^2+2x+5} = \boxed{\begin{array}{l} u = x^2+2x+5 \\ du = (2x+2)dx \end{array}}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} - \int\frac{dx}{(x+1)^2+4} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|u| - \int\frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|\underbrace{x^2+2x+5}_{>0}| - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(\frac{x+1}{2})^2+1} = \boxed{\begin{array}{l} v = \frac{x+1}{2} \\ dv = \frac{1}{2}dx \end{array}}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\int\frac{dv}{v^2+1}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\arctan v + C$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C \qquad \text{für } x\neq 0$$

Aufgabe 2.

a) Zunächst spalten wir den polynomialen Anteil ab:

$$\frac{x^2}{x^2-4} = \frac{(x^2-4)+4}{x^2-4} = 1 + \frac{4}{x^2-4} = 1 + \frac{4}{(x-2)(x+2)}$$

Den echt gebrochen rationalen Anteil zerlegen wir in Partialbrüche:

$$\frac{4}{(x-2)\,(x+2)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \qquad \Rightarrow \qquad 4 = A\,(x+2) + B\,(x-2)$$

$$x = -2: \quad 4 = B\cdot(-4) \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

$$x = 2: \quad 4 = A\cdot 4 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

Hiermit berechnen wir das Integral:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^2-4}\,dx = \int_{-1}^{1} dx + \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-2} - \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+2} = 2 + \Big[\ln|x-2| - \ln|x+2|\Big]_{-1}^{1}$$

$$= 2 + \Big[\ln 1 - \ln 3\Big] - \Big[\ln 3 - \ln 1\Big] = 2 - 2\ln 3$$

b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2}{x^3+x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2\,(x+1)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 1 = Ax\,(x+1) + B\,(x+1)\,Cx^2$$

$$x = 0: \quad -1 = B$$

$$x = -1: \quad 1 = C$$

Koeffizient von x^2: $\quad 2 = A + C \quad \Rightarrow A = 2 - C = 1$

Berechnung des Integrals:

$$\int_{1}^{3} \frac{2x^2-1}{x^3+x^2}\,dx = \int_{1}^{3} \frac{dx}{x} - \int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2} + \int_{1}^{3} \frac{dx}{x+1} = \Big[\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x+1|\Big]_{1}^{3}$$

$$= \Big[\ln 3 + \frac{1}{3} + \ln 4\Big] - \Big[\ln 1 + 1 + \ln 2\Big] = \ln 3 + \frac{1}{3} + 2\ln 2 - 1 - \ln 2$$

$$= \ln 6 - \frac{2}{3}$$

c) Nachdem wir die Nenner-Nullstelle $x_1 = -1$ erraten haben, können wir die restlichen Nullstellen berechnen:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 9 & 5 \\ -1 & & -1 & -4 & -5 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & \underline{\underline{0}} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad x_{2,3} = \tfrac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2} = -2 \pm i$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^3+5x^2+9x+5} = \frac{1}{(x+1)\,(x^2+4x+5)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A\left(x^2+4x+5\right) + (Bx+C)\,(x+1)$$

$$x=-1: \quad 1 = A\cdot(1-4+5) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

$$x=0: \quad 1 = A\cdot 5 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1-5A = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Koeffizient von } x^2: \quad 0 = A+B \quad \Rightarrow \quad B = -A = -\frac{1}{2}$$

Berechnung des Integrals:

$$\int\limits_{-5/2}^{-3/2} \frac{dx}{x^3+5x^2+9x+5} = \frac{1}{2}\int\limits_{-5/2}^{-3/2} \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\limits_{-5/2}^{-3/2} \frac{x+3}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ln|x+1|\Big]_{-5/2}^{-3/2} - \frac{1}{4}\int\limits_{-5/2}^{-3/2} \frac{2x+4+2}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\int\limits_{-5/2}^{-3/2} \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{-5/2}^{-3/2} \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 3 + \Big[-\frac{1}{4}\ln\left((x+2)^2+1\right) - \frac{1}{2}\arctan(x+2)\Big]_{-5/2}^{-3/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 3 + \Big[-\frac{1}{4}\ln\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}\Big] - \Big[-\frac{1}{4}\ln\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 3 - \arctan\frac{1}{2}$$

Aufgabe 3.

a) Die Lösung erfordert zunächst zweimalige partielle Integration:

$$\int e^x\cos 2x\,dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u=\cos 2x & u'=-2\sin 2x \\ v'=e^x & v=e^x \end{array}} = e^x\cdot\cos 2x + 2\int e^x\sin 2x\,dx$$

$$= \boxed{\begin{array}{c|c} u=\sin 2x & u'=2\cos 2x \\ v'=e^x & v=e^x \end{array}} = e^x\cdot\cos 2x + 2\left[e^x\sin 2x - 2\int e^x\cos 2x\,dx\right]$$

$$= e^x\cdot(\cos 2x + 2\sin 2x) - 4\int e^x\cos 2x\,dx$$

Hieraus ergibt sich durch Zusammenfassung der beiden Integrale

$$\int e^x\cos 2x\,dx = \frac{1}{5}e^x\left(\cos 2x + 2\sin 2x\right) + C$$

b) Die vollständige Integration gelingt durch zwei partielle Integrationen:

$$\int x^2 \sin x \, dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}} = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$$

$$= \boxed{\begin{array}{c|c} u = 2x & u' = 2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}} = -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

c) Nicht überall wo es nach partieller Integration riecht, ist diese auch tatsächlich angebracht. Im vorliegenden Beispiel führt partielle Integration nicht zum Ziel. Die Integration gelingt aber durch Umformung:

$$\int e^x \sinh x \, dx = \int e^x \cdot \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x}\right) \, dx = \frac{1}{2} \int \left(e^{2x} - 1\right) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} - x\right] + C = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} x + C$$

Betrachten wir, was bei partieller Integration passiert:

$$\int e^x \sinh x \, dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sinh x & v = \cosh x \end{array}} = e^x \cosh x - \int e^x \cosh x \, dx$$

$$= \boxed{\begin{array}{c|c} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cosh x & v = \sinh x \end{array}} = e^x \cosh x - e^x \sinh x + \int e^x \sinh x \, dx$$

Offenbar haben wir keinerlei Fortschritte erzielt. Daran ändert sich auch nichts, wenn wir die Rollen von u und v vertauschen.

d) Die geeignetste Lösungsmethode ist partielle Integration:

$$\int x \arctan x \, dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u = \arctan x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \frac{1}{2} x^2 \end{array}} = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{1 - x^2}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{\left(1 + x^2\right) - 1}{1 + x^2} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

Man kann diese Lösung noch etwas beschleunigen. Die Funktion v ist nämlich nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Mit einem scharfen Auge wählen wir diese Konstante so, dass das resultierende Integral möglichst einfach ist:

$$\int x \arctan x \, dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u = \arctan x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \end{array}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^2 + 1\right) \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1}{1 + x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x^2 + 1\right) \arctan x - \frac{1}{2} x + C$$

Aufgabe 4.

a) Wir berechnen zunächst das unbestimmte Integral:

$$\int x\ln x\,dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u'=x & u=\frac{1}{2}x^2 \\ v=\ln x & v'=\frac{1}{x}\end{array}} = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Nun setzen wir die Grenzen ein:

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = [2\ln 2 - 1] - [0 - \frac{1}{4}] = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

b) Mit $u = x$ und $v' = \cos x$ ist

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = \cos x\Big|_0^\pi = -1-1=-2$$

c) Der arctan muß abgeleitet werden, koste es, was es wolle:

$$\int_0^1 \arctan x\,dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u=\arctan x & u'=\frac{1}{1+x^2} \\ v'=1 & v=x\end{array}} = \Big[x\arctan x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \Big[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big]_0^1 = \Big[\arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 2\Big] - [0-0] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

d) Partielle Integration reduziert den Grad des Polynoms vor der e-Funktion jeweils um 1. Es sind folglich 4 partielle Integrationen nötig. Durch eine Rekursion können wir uns Arbeit ersparen. Wir führen die partielle Integration für eine Potenz mit beliebigem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ durch:

$$\int_0^1 x^n e^x\,dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u=x^n & u'=nx^{n-1} \\ v'=e^x & v=e^x\end{array}} = \Big[x^n e^x\Big]_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x\,dx$$

$$= e - n\int_0^1 x^{n-1}e^x\,dx$$

Diese Rekursionsformel können wir nun mehrfach anwenden:

$$\int_0^1 \left(x^4-3x\right)e^x\,dx = \int_0^1 x^4e^x\,dx - 3\int_0^1 xe^x\,dx = \left[e - 4\int_0^1 x^3e^x\,dx\right] - 3\int_0^1 xe^x\,dx$$

$$= e - 3\int_0^1 xe^x\,dx - 4\left[e - 3\int_0^1 x^2e^x\,dx\right] = -3e - 3\int_0^1 xe^x\,dx + 12\int_0^1 x^2e^x\,dx$$

$$= -3e - 3\int_0^1 xe^x\,dx + 12\left[e - 2\int_0^1 xe^x\,dx\right] = 9e - 27\int_0^1 xe^x\,dx$$

$$= 9e - 27\left[e - \int_0^1 e^x\,dx\right] = -18e + 27\int_0^1 e^x\,dx = -18e + 27e^x\Big|_0^1$$

$$= -18e + 27\,[e-1] = 9e - 27 = -18e + 27\,[e-1] = 9e - 27$$

Eine echte Alternative zu dieser Integrationsmethode ist im vorliegenden Fall ein Ansatz für das unbestimmte Integral:

$$\int \left(x^4 - 3x\right) e^x\,dx \overset{!}{=} \left(a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) e^x + C$$

Durch Ableiten ergibt sich

$$\left(x^4 - 3x\right) e^x = \left(a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) e^x + \left(4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1\right) e^x$$

$$\Rightarrow \quad x^4 - 3x = x^4a_4 + x^3\,(a_3 + 4a_4) + x^2\,(a_2 + 3a_3) + x\,(a_1 + 2a_2) + (a_0 + a_1)$$

$$\Rightarrow \quad a_4 = 1, \qquad a_3 = 0 - 4a_4 = -4, \qquad a_2 = 0 - 3a_3 = 12,$$

$$a_1 = -3 - 2a_2 = -27, \qquad a_0 = 0 - a_1 = 27$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^1 \left(x^4 - 3x\right) e^x\,dx = \left[\left(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 27x + 27\right) e^x\right]_0^1$$

$$= \Big[(1 - 4 + 12 - 27 + 27)\,e\Big] - \Big[27\Big] = 9e - 27$$

Aufgabe 5.

a) Wir betrachten die beiden Summanden zunächst getrennt:

$$\int e^x \sin x\,dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u = e^x & u' = e^x \\ \hline v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}} = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

$$= \boxed{\begin{array}{c|c} u = e^x & u' = e^x \\ \hline v' = \cos x & v = \sin x \end{array}} = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

Hieraus ergibt sich

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x\,(\sin x - \cos x) + C$$

Auch der zweite Teil kann mittels partieller Integration gelöst werden:

$$\int x^2e^{3x}\,dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u = x^2 & u' = 2x \\ \hline v' = e^{3x} & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}} = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \int 2x \cdot \frac{1}{3}e^{3x}\,dx$$

$$= \boxed{\begin{array}{c|c} u = x & u' = 1 \\ \hline v' = e^{3x} & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}} = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}xe^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C$$
$$= \frac{1}{27}e^{3x}\left(9x^2 - 6x + 2\right) + C$$

Zusammengenommen erhält man eine Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $e^x \sin x + x^2e^{3x}$:

$$F(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{27}e^{3x}\left(9x^2 - 6x + 2\right)$$

b) Wir betrachten zunächst die ersten beiden Summanden:

$$\int \left(5x^7 - x^{-\pi}\right)\,dx = \frac{5}{8}x^8 - \frac{1}{1-\pi}x^{1-\pi} + C$$

Der letzte Summand ist nicht so einfach:

$$\int \frac{dx}{e^x - 1} = \boxed{\begin{matrix} u = e^x \\ du = e^x\,dx = u\,dx \end{matrix}} = \int \frac{du}{u(u-1)}$$

Das rechts stehende Integral berechnen wir mittels Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{u(u-1)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(u-1) + Bu$$
$$\Rightarrow \quad (u=0) \quad A = -1, \qquad (u=1) \quad B = 1$$
$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{e^x-1} = \int \frac{du}{u(u-1)} = -\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u-1}$$
$$= -\ln|u| + \ln|u-1| + C = -x + \ln|e^x - 1| + C$$

Damit können wir für $x \neq 0$ eine Stammfunktion $F(x)$ von $5x^7 - x^{-\pi} + \frac{1}{e^x-1}$ angeben:

$$F(x) = \frac{5}{8}x^8 + \frac{1}{\pi - 1}x^{1-\pi} - x + \ln|e^x - 1|$$

c) Zur Berechnung des unbestimmten Integrals wird ausmultipliziert:

$$\int \left(x^3 - 2\right)(x-1)\,dx = \int \left(x^4 - x^3 - 2x + 2\right)\,dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 2x + C$$

Eine Stammfunktion $F(x)$ von $\left(x^3 - 2\right)(x-1)$ ist daher

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 2x$$

d) Die Integration gelingt durch trigonometrische Umformungen:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin^4 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x\left(1 - \sin^2 x\right)} = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 4\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$$
$$= \boxed{\begin{matrix} u = 2x \\ du = 2\,dx \end{matrix}} = 2\int \frac{du}{\sin^2 u} = -2\cot u + C = -2\cot 2x + C$$

Daher ist $-2\cot 2x$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sin^2 x - \sin^4 x}$

Aufgabe 6.
a) Das Integral ist zur oberen Grenze uneigentlich. Wir berechnen zunächst das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \boxed{\begin{array}{c} u = 1-x \\ du = -\,dx \end{array}} = \int \frac{-\,du}{\sqrt{u}} = -2\sqrt{u} + C = -2\sqrt{1-x} + C$$

Daher ist

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\Big[\sqrt{1-x}\Big]_0^1 = -2\cdot(0-1) = 2$$

Damit ist auch die Konvergenz des Integrals bewiesen.

b) Das Integral ist zur oberen Grenze uneigentlich.

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \boxed{\begin{array}{c} u = \arctan x \\ du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \end{array}} = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\arctan^2 x + C$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\arctan^2 x\Big]_0^\infty = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0\right] = \frac{1}{8}\pi^2$$

c) Das Integral ist beidseitig uneigentlich. Für den Integranden gilt

$$\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \leq \left|\frac{1}{1+x^2}\right| < \frac{1}{x^2}$$

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist sowohl über $(-\infty,-1]$ als auch über $[1,\infty)$ uneigentlich integrierbar. $f(x)$ ist also eine konvergente Majorante. Daher existiert auch das zu untersuchende Integral. Der Integrand ist eine ungerade Funktion. Folglich ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = 0$$

d) Das Integral ist zur unteren Grenze uneigentlich

$$\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx = \boxed{\begin{array}{c|c} u = -x^2 & x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ du = -2x\,dx & x = -\infty \Rightarrow u = -\infty \end{array}} = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^u\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[e^u\Big]_{-\infty}^0 = -\frac{1}{2}\Big[1 - e^{-\infty}\Big] = -\frac{1}{2}$$

Aufgabe 7.

a) Das Integral ist zur unteren Grenze uneigentlich. Es ist

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{1}{\sqrt{\sin x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{\frac{x}{\sin x}}<\frac{2}{\sqrt{x}}$$

für $x>0$ nahe genug bei 0. Das heißt, $\frac{2}{\sqrt{x}}$ ist eine konvergente Majorante. Das zu untersuchende Integral konvergiert also ebenfalls.

b) Das Integral ist zur oberen Grenze uneigentlich. Es ist

$$0<\frac{1}{x^2+e^x}\leq\frac{1}{e^x}=e^{-x} \qquad \text{und} \qquad \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty=1$$

Die Funktion e^{-x} ist demzufolge eine konvergente Majorante. Das zu untersuchende Integral existiert.

c) Das Integral ist beidseitig uneigentlich. Es ist

$$\int\limits_0^\infty x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^\infty=\infty$$

Dieses Integral konvergiert also nicht. Das zu untersuchende Integral erstreckt sich über ein größeres Intervall, existiert also ebenfalls nicht. (Obwohl die Funktion ungerade ist und das Integrationsintervall symmetrisch zu 0 liegt.)

d) Das Integral ist (scheinbar) an der unteren Grenze uneigentlich. Es gilt aber:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$$

Der Integrand hat also an der unteren Grenze gar keinen Pol, sondern kann stetig ergänzt werden. Daher existiert das zu untersuchende Integral.

Aufgabe 8.

a) Das Integral ist beidseitig uneigentlich. Wir berechnen zunächst das unbestimmte Integral:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\boxed{\begin{array}{c}x=\cos u\\ dx=-\sin u\,dx\end{array}}=\int\frac{-\sin u}{\cos^2 u\cdot\underbrace{\sqrt{1-\cos^2 u}}_{\sin u}}\,du$$

$$=-\int\frac{du}{\cos^2 u}=-\tan u+C=-\frac{\sin u}{\cos u}+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

Wegen der nicht exakt geklärten Vorzeichen der Wurzeln überprüfen wir das Ergebnis durch differenzieren:

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)=\frac{x\cdot\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{x^2+\left(1-x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

Also

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \left[-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right]_0^1 = 0 + \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} = +\infty$$

Das Integral existiert also (wegen der unteren Grenze 0) nicht.

b) Das Intervall wird an der Polstelle 1 aufgespalten:

$$\int_{\frac{3}{5}}^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{|x^2-1|}} = \int_{\frac{3}{5}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \left[-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right]_{3/5}^1 + \left[\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right]_1^{\infty}$$

$$= \frac{4}{3} + \left[\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 0\right] = \frac{4}{3} + \left[\lim_{x\to\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 0\right]$$

$$= \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

Aufgabe 9.

Die Integration von $\arctan x$ wurde in einer früheren Aufgabe betrachtet. Eine Stammfunktion von $\arctan x$ hat sich als $F(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ ergeben. Durch Ableiten kann das leicht bestätigt werden.

Daraus ergibt sich leicht das Integral von $\arctan \alpha x$ für $\alpha \neq 0$. Mit $u = \alpha\cdot x$ ist $du = \alpha dx$, also

$$\int \arctan(\alpha x)\, dx = \frac{1}{\alpha}\int \arctan u\, du = \frac{1}{\alpha}\left[u\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right] + C =$$

$$= x\cdot\arctan(\alpha x) - \frac{1}{2\alpha}\ln(1+(\alpha x)^2) + C \qquad (C\in\mathbb{R})$$

Damit kann das unbestimmte Integral der vorgelegten Funtion ermittelt werden

$$\int \arctan 5x - \arctan 7x + \frac{a}{x+1}\, dx = [x\arctan 5x - \frac{1}{10}\ln(1+(5x)^2)] -$$

$$-[x\arctan 7x - \frac{1}{14}\ln(1+(7x)^2)] + a\ln|x+1| + C =$$

$$= x(\arctan 5x - \arctan 7x) + \frac{1}{2}\ln\frac{(1+49x^2)^{\frac{1}{7}}((x+1)^2)^a}{(1+25x^2)^{\frac{1}{5}}} + C$$

Die benötigten Grenzwerte für $x \to \infty$ werden für die beiden Summanden getrennt berechnet. Zunächst der Arcustangens- Term:

$$\lim_{x\to\infty} x(\arctan 5x - \arctan 7x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan 5x - \arctan 7x}{\frac{1}{x}} = \boxed{\tfrac{0}{0}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{1+(5x)^2} - \frac{7}{1+(7x)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{7x^2}{1+49x^2} - \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{1+25x^2} = \frac{1}{7} - \frac{1}{5} = -\frac{2}{35}$$

Der Arcustangens-Term konvergiert also für alle $a \in \mathbb{R}$. Der Logarithmus-Term muss entscheiden, wo Konvergenz vorliegt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{(1+(7x)^2)^{\frac{1}{7}}((x+1)^2)^a}{(1+(5x)^2)^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{2} \ln \lim_{x\to\infty} \frac{(1+(7x)^2)^{\frac{1}{7}}((x+1)^2)^a}{(1+(5x)^2)^{\frac{1}{5}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \lim_{x\to\infty} \frac{(7x)^{\frac{2}{7}} x^{2a}}{(5x)^{\frac{2}{5}}} = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{(7x)^{\frac{1}{7}} x^{a}}{(5x)^{\frac{1}{5}}} = \ln\left(\frac{7^{\frac{1}{7}}}{5^{\frac{1}{5}}} \lim_{x\to\infty} x^{a+\frac{1}{7}-\frac{1}{5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{7}\ln 7 - \frac{1}{5}\ln 5 + (a + \frac{1}{7} - \frac{1}{5}) \ln \lim_{x\to\infty} x = \frac{1}{7}\ln 7 - \frac{1}{5}\ln 5 + (a - \frac{2}{35}) \ln \lim_{x\to\infty} x$$

Nur für $a = \frac{2}{35}$ konvergiert demnach der Logarithmus-Term und mit ihm das gesamte uneigentliche Integral. Es ist

$$\int_0^\infty \arctan 5x - \arctan 7x + \frac{a}{x+1}\, dx = \begin{cases} -\infty & \text{für} \quad a < \frac{2}{35} \\ \frac{1}{7}\ln 7 - \frac{1}{5}\ln 5 - \frac{2}{35} & \text{für} \quad a = \frac{2}{35} \\ +\infty & \text{für} \quad a > \frac{2}{35} \end{cases}$$