Aufgabe 1.
a) Einfach ausmultiplizieren:

$$(3-\sqrt{6})(2+\sqrt{6}) = 6 + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 6 = \sqrt{6}$$

b) Beide Klammern enthalten $\sqrt{3}-\sqrt{6}$:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}) = (\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\sqrt{6}))(\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{6}))$$
$$= 2-(\sqrt{3}-\sqrt{6})^2 = 2-(3-2\sqrt{3}\sqrt{6}+6) = 2-(9-2\sqrt{18}) = -7+2\sqrt{9}\sqrt{2}$$
$$= -7+6\sqrt{2}$$

Alternativ kann auch jeder Summand der ersten Klammer mit jedem der zweiten multipliziert werden.

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})$$
$$= 2-\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{6}+\sqrt{3}\sqrt{2}-3+\sqrt{3}\sqrt{6}-\sqrt{6}\sqrt{2}+\sqrt{6}\sqrt{3}-6$$
$$= 2-\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{6}-3+\sqrt{18}-\sqrt{12}+\sqrt{18}-6 = -7+2\sqrt{18}$$
$$= -7+6\sqrt{2}$$

c) Wurzeln sind letztlich Hochzahlen. Die Reihenfolge kann also vertauscht werden:

$$\sqrt[3]{\sqrt{27}} = (27^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = (27^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}$$

Aufgabe 2.
a) Sehr häufig steht wie hier nur eine einzelne Wurzel im Nenner.

$$\frac{-3}{\sqrt{6}} = \frac{-3\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-3\sqrt{6}}{6} = -\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

b) Ist die Wurzel nicht allein, wird es etwas schwieriger:

$$\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{6}\sqrt{2}-\sqrt{6}\sqrt{3}}{2-3}$$
$$= -(3\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{18} = -3\sqrt{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 2}$$
$$= -3\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2} = \sqrt{3}$$

c) Faktoren vor den Wurzeln stören nicht:

$$\frac{7\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}\cdot\frac{5\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{5}} = \frac{35\sqrt{15}-14\cdot 5+25\cdot 3-10\sqrt{15}}{25\cdot 3-4\cdot 5}$$
$$= \frac{1}{55}(25\sqrt{15}+5) = \frac{1}{11}(1+5\sqrt{15})$$

Aufgabe 3. Die mittlere Geschwindigkeit v berechnet sich aus dem zurückgelegten Weg s und der benötigten Zeit t gemäß $v = \frac{s}{t}$. Bezeichnet a die einfache Wegstrecke, dann benötigen Sie für die Hinfahrt die Zeit

$$t_1 = \frac{a}{v_1} = \frac{a}{7}\frac{h}{km}$$

Für die Rückfahrt benötigen Sie

$$t_2 = \frac{a}{v_2} = \frac{a}{15}\frac{h}{km}$$

Die mittlere Gesamtgeschwindigkeit ist folglich

$$v_g = \frac{2a}{t_1+t_2} = \frac{2a}{\frac{a}{7}+\frac{a}{15}}\frac{km}{h} = \frac{2}{\frac{1}{7}+\frac{1}{15}}\frac{km}{h} = \frac{2}{\frac{15}{7\cdot 15}+\frac{7}{7\cdot 15}}\frac{km}{h} = \frac{2\cdot 7\cdot 15}{22} = \frac{105}{11}\frac{km}{h}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit auf der gesamten Fahrt ist also ungefähr 9,55 km/h.

Aufgabe 4.

a) Die Aufgabe geht viel schneller, wenn man bedenkt, dass der Betrag eines Quotienten gleich dem Quotienten der Beträge ist und dass eine komplexe Zahl den gleichen Betrag hat wie die konjugiert komplexe Zahl. Für die einzelnen Summanden ergibt sich so:

$$\left|\frac{1}{\overline{z_3}}\right| = \frac{1}{|\overline{z_3}|} = \frac{1}{|4+4i|} = \frac{1}{4\cdot|1+i|} = \frac{1}{4\sqrt{1+1}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{z_2}{\overline{z_2}}\right| = \frac{|z_2|}{|\overline{z_2}|} = \frac{|z_2|}{|z_2|} = 1$$

$$|z_1| = |12-5i| = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{169} = 13$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\left|\frac{1}{\overline{z_3}}\right| + \left|\frac{z_2}{\overline{z_2}}\right| + |z_1| = \frac{1}{8}\sqrt{2}+1+13 = 14+\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

b) Auch hier kann man sich die Arbeit etwas erleichtern, nämlich indem man z_1 ausklammert. Für die verbleibenden Summanden ergibt sich:

$$25\cdot\frac{z_3}{z_2} = 25\cdot\frac{4-4i}{i-7} = 100\cdot\frac{(1-i)(-i-7)}{(i-7)(-i-7)} = 100\cdot\frac{-7-1+7i-i}{50} = 2\cdot(-8+6i) = 12i-16$$

$$\frac{6}{z_2+z_3} = \frac{6}{(i-7)+(4-4i)} = \frac{6}{-3-3i} = \frac{-2}{1+i} = -2\cdot\frac{1-i}{2} = i-1$$

Für den gesamten Ausdruck ergibt sich damit:

$$25\cdot\frac{z_1\cdot z_3}{z_2} + \frac{6z_1}{z_2+z_3} = z_1\cdot\left(25\cdot\frac{z_3}{z_2}+\frac{6}{z_2+z_3}\right) = z_1\cdot((12i-16)+(i-1)) =$$

$$= (12-5i)(13i-17) = (-12\cdot 17+5\cdot 13)+i\cdot(5\cdot 17+12\cdot 13) = -139+241i$$

Aufgabe 5. (Die ersten beiden Teile der Aufgabe stammen aus dem Band 1 des Mathematik-Lehrbuchs für Fachhochschulen von Fetzer und Fränkel.)

a) z^2 kann nach der binomischen Formel berechnet werden. Bei z^3 und z^4 verwendet man am besten die schon bekannten Ergebnisse:

$$z^2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^2 = 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}i + \left(\sqrt{2}i\right)^2 = 2 + 4i - 2 = 4i$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = (4i) \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right) = 4i\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}$$

$$z^4 = \left(z^2\right)^2 = (4i)^2 = 16 \cdot (-1) = -16$$

Für die Real- und Imaginärteile ergibt sich demnach:

$$\Re(z^2) = 0,\ \Im(z^2) = 4, \quad \Re(z^3) = -4\sqrt{2},\ \Im(z^3) = 4\sqrt{2}, \quad \Re(z^4) = -16,\ \Im(z^4) = 0$$

b) Lediglich der Betrag von z muss direkt berechnet werden. Hieraus können auch die Beträge der Potenzen ermittelt werden:

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left|z^2\right| = |z|^2 = 2^2 = 4$$

$$\left|z^3\right| = |z|^3 = 2^3 = 8$$

$$\left|z^4\right| = |z|^4 = 2^4 = 16$$

c) Die Zahl z liegt im ersten Quadranten auf der ersten Winkelhalbierenden und zwar im Abstand 2 vom Ursprung. Beim weiteren Potenzieren „dreht“ sich die Zahl jeweils um 45° (bezüglich dem Ursprung). Der Betrag der Zahl, also der Abstand zum Ursprung, verdoppelt sich jeweils.

Aufgabe 6. Wegen $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ ist mit $a, b \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ auch $a + b \cdot \sqrt{5} \in \mathbb{R}$. Die gegebene Zahlenmenge K ist also eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Deshalb gelten auch in K die Assoziativ- und Kommutativgesetze, sowie das Distributivgesetz.

Die beiden neutralen Elemente $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{5}$ und $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{5}$ sind offenbar in K enthalten. Wegen

$$-(a + b \cdot \sqrt{5}) = -a - b \cdot \sqrt{5}$$

$$\frac{1}{a + b \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{a + b \cdot \sqrt{5}} \cdot \frac{a - b \cdot \sqrt{5}}{a - b \cdot \sqrt{5}} = \frac{a - b \cdot \sqrt{5}}{a^2 - 5b^2} = \frac{a}{a^2 - 5b^2} + \frac{-b}{a^2 - 5b^2} \cdot \sqrt{5}$$

sind mit jeder Zahl $x \in K$ auch die inversen Elemente $-x$ und $\frac{1}{x}$ (letzteres für $x \neq 0$) in K enthalten.

Leicht übersehen werden kann, dass auch noch bewiesen werden muss, dass mit x und y die Zahlen $x+y$ und $x \cdot y$ in K liegen:

$$(a + b \cdot \sqrt{5}) + (c + d \cdot \sqrt{5}) = (a + b) + (c + d) \cdot \sqrt{5}$$

$$(a + b \cdot \sqrt{5}) \cdot (c + d \cdot \sqrt{5}) = a \cdot c + a \cdot d \cdot \sqrt{5} + b \cdot c + b \cdot d \cdot 5$$

$$= (ac + 5bd) + (ad + bc) \cdot \sqrt{5}$$

Aufgabe 7. Wir nehmen an, es wäre möglich, die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks auf die beschriebene Art zu wählen. Wir führen dies zu einem Widerspruch, indem wir den Flächeninhalt F des Dreiecks auf zwei Weisen berechnen:

a) Über Grundseite g und die Höhe h:

$$F = \frac{1}{2} g \cdot h = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{g}{2} \cdot \tan 60^\circ \right) = \frac{1}{4} g^2 \cdot \sqrt{3}$$

Die Grundseite ist die Hypotenuse eines Dreiecks mit ganzzahligen Katheten. Daher ist g^2 ganzzahlig. Dies zeigt, dass F irrational ist.

b) Über das umschließende Rechteck: Vom Rechteck müssen (zwei oder) drei rechtwinklige Dreiecke abgezogen werden. Sowohl der Inhalt des Rechtecks, als auch derjenige jedes der Dreiecke ist rational. Deshalb ist F rational.

Dies ist ein Widerspruch. Die Annahme ist daher falsch.

Bemerkung: Die Lösung der Schachaufgabe ist $g7 \times f8 - S\#$. Der weiße Bauer schlägt also den schwarzen Springer und wandelt sich selbst in einen Springer um. Dies ist nötig, um das Feld $h7$ zu decken.