Thema: Extremwertaufgaben

Aufgabe 1. (SS 99) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 2x^3 + x + 1 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

a) Zeigen Sie, dass diese Funktion streng monoton wachsend ist. Wie viele reelle Nullstellen hat die Funktion f? Und wie viele komplexe Nullstellen hat das Polynom $2x^3+x+1$? Begründen Sie Ihre Antworten! Zeigen Sie weiter, dass sich eine Nullstelle $\tilde{x}$ von f zwischen -1 und 0 befindet.

b) Ermitteln Sie die Nullstelle $\tilde{x}$ der Funktion $f(x)$ näherungsweise mit dem Newton-Verfahren, indem Sie vom Startwert $x_0 = -\frac{1}{2}$ ausgehend zwei Iterationen durchführen.

c) Gegeben sei die Parabel $y = x^2$ und der Punkt S(-1,0). Ermitteln Sie (näherungsweise) denjenigen Punkt auf der Parabel, welcher dem Punkt S am nächsten liegt und geben Sie den Abstand des Punktes S von der Parabel an.

Hinweis: Eine Skizze ist hier hilfreich.

Aufgabe 2. Der Sicherheitsabstand zweier Autos zueinander setzt sich aus einem in der Geschwindigkeit v linearen Term - dem Weg, welchen das Fahrzeug in der „Schrecksekunde“ des Fahrers zurücklegt - und einem in v quadratischen Term - der Bremsstrecke - zusammen:

$$\Delta \quad = \quad k_1 \cdot v \quad + \quad k_2 \cdot v^2$$

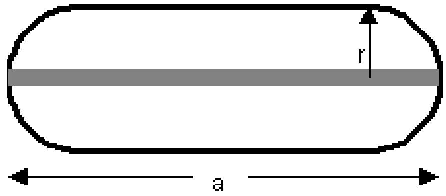
wobei $k_1 = 1sec$ und $k_2 = 0.016\frac{sec^2}{m}$.

In einer Autoschlange, in welcher die durchschnittliche Fahrzeuglänge $L = 3.6m$ beträgt, hält jeder Fahrer genau den angegebenen Sicherheitsabstand ein.

a) Mit welcher Geschwindigkeit müssen die Wagen fahren, damit die Schlange am schnellsten vorwärts kommt?

b) Wie lautet die Antwort auf diese Frage, wenn sich in der Schlange mehr Lastwagen befinden, so dass die durchschnittliche Fahrzeuglänge $L = 6.4m$ beträgt?

Aufgabe 3. (WS 07) Ein schmales Hindernis der Länge $a > 0$ soll mit einem Fahrzeug umrundet werden, wobei die Fahrzeugausdehnungen und die Breite des Hindernisses vernachlässigt werden können. Der Fahrer wählt hierzu eine Bahn mit halbkreisförmigen Kehren vom Radius $r > 0$, zwischen welchen er geradlinig fährt.



Das Fahrzeug soll mit (betragsmäßig) konstanter Geschwindigkeit v fahren. Diese wird so gewählt, dass das Fahrzeug gerade noch nicht aus der Kurve fliegt. Hieraus ergibt sich $v = b \cdot \sqrt{r}$ mit einem festen Faktor $b > 0$.

a) Zeigen Sie, dass das Fahrzeug für eine Runde die Zeit

$$t(r) \;=\; \frac{1}{b} \cdot \left[\; 2(\pi - 2) \cdot r^{\frac{1}{2}} \;+\; 2a \cdot r^{-\frac{1}{2}} \;\right]$$

benötigt. Für welche r ist diese Formel gültig? Wie verhält sich $t(r)$ für $r \to 0$?

b) Bei welchem (zulässigen) Kehrenradius wird die kürzeste Rundenzeit erzielt? Welche spezielle Form hat die Bahn in diesem Falle?

Aufgabe 4. Welchen Weg muss der Mann A einschlagen, um möglichst schnell zu der Insel I zu gelangen, wenn er fünfmal so schnell läuft, als er zu schwimmen vermag? (Bestimmen Sie die Lösung näherungsweise mit Hilfe des Newton-Verfahrens.)