Aufgabe 1.
a) Für die Ableitung gilt

$$f'(x) = 6x^2 + 1 \geq 1 > 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Deshalb ist die Funktion f streng monoton wachsend. Damit ist sie auch injektiv, kann also höchstens eine Nullstelle haben. Andererseits hat f als Polynom ungeraden Grades mindestens eine (reelle) Nullstelle. Die komplexen Nullstellen entsprechen dem Grad. f hat also drei komplexe Nullstellen. Genau eine davon ist reell. Wegen

$$f(-1) = -2 < 0 \qquad \text{und} \qquad f(0) = 1 > 0$$

muss nach dem Zwischenwertsatz zwischen -1 und 0 eine (reelle) Nullstelle liegen.

b) Ausgehend vom Startwert $x_0 = -\frac{1}{2}$ ist

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{10}{4}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{3}{5} - \frac{-\frac{4}{125}}{\frac{79}{25}} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5 \cdot 79} = -\frac{233}{395} \approx -0.58987$$

Die Nullstelle ist also $\tilde{x} \approx -0.58987$.

c) Ein beliebiger Punkt auf der Parabel wird durch (x, x^2) beschrieben. Für den Abstand d zum Punkt $S(-1, 0)$ gilt

$$d = \sqrt{(x - (-1))^2 + (x^2 - 0)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + x^4}$$

Als Zielfunktion eignet sich am besten das Quadrat dieses Abstandes:

$$g(x) := d^2 = (x+1)^2 + x^4 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Dieses Polynom vierten Grades ist nach unten beschränkt, besitzt also ein absolutes Minimum. Für dieses gilt

$$g'(x) = 2(x+1) + 4x^3 = 2 \cdot (2x^3 + x + 1) = 2 \cdot f(x) \stackrel{!}{=} 0$$

Das absolute Minimum liegt demnach an der Stelle $\tilde{x} \approx -0.58987$. Der zugehörige Punkt L ist ungefähr $(-0.58987, 0.34781)$. Der Abstand zwischen S und L ist $d \approx 0.53784$.

Aufgabe 2. Eine Lösung erhält man, wenn man die Anzahl $A(v)$ der Wagen, die in einer festgelegten Zeitspanne einen Kontrollpunkt passiert, maximiert. Es ist

$$A(v) = \frac{v}{L + \Delta} = \frac{v}{L + k_1 v + k_2 v^2}$$

Diese Funktion wird dort maximal, wo der Kehrwert $T(v)$ (entspricht der Zeit, die zum Zurücklegen der Strecke $L + \Delta$ benötigt wird) minimal wird:

$$T(v) \;=\; \frac{L + k_1 v + k_2 v^2}{v} \;=\; \frac{L}{v} + k_1 + k_2 v \qquad\qquad (v \in (0, \infty))$$

Sowohl für $v \to 0$ als auch für $v \to \infty$ strebt T gegen ∞. $T(v)$ besitzt also (mindestens) ein absolutes Minimum. (Vergleiche den Beweis, dass nicht konstante Polynome geraden Grades immer (mindestens) ein absolutes Extremum besitzen.) Es gibt nämlich ein $\varepsilon > 0$, so dass $T(v) > T(0)$ für alle $v < \varepsilon$ und ein $M > 0$, so dass $T(v) > T(0)$ für alle $v > M$. Auf dem Intervall $[\varepsilon, M]$ ist $T(v)$ stetig, hat also nach Weierstraß ein absolutes Minimum. Dies ist ein absolutes Minimum für das ganze Intervall $(0, \infty)$. Da keine Ränder vorhanden sind, muss das Minimum an einer stationären Stelle sein:

$$T'(v) \;=\; -\frac{L}{v^2} + k_2 \;\stackrel{!}{=}\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{L}{k_2}}$$

(Dieser Wert hängt nicht von k_1 ab!)

a) Die optimale Geschwindigkeit bei $L = 3.6m$ ist

$$v = \sqrt{\frac{3.6m}{0.016sec^2/m}} = 15\frac{m}{sec} = 54\frac{km}{h}$$

b) Die optimale Geschwindigkeit bei $L = 6.4m$ ist

$$v = \sqrt{\frac{6.4m}{0.016sec^2/m}} = 20\frac{m}{sec} = 72\frac{km}{h}$$

Aufgabe 3.

a) Die Länge einse geradlinigen Abschnittes der Bahn ist

$$s_1 \;=\; a \;-\; 2 \cdot r$$

Die beiden Kehren ergeben zusammen einen vollen Kreis. Ihre Gesamtlänge ist daher

$$s_2 \;=\; 2\pi \cdot r$$

Für den in einer Runde zurückgelegten Weg ergibt sich

$$s \;=\; 2 \cdot s_1 + s_2 \;=\; 2 \cdot (a - 2r) + 2\pi \cdot r \;=\; 2(\pi - 2) \cdot r + 2 \cdot a$$

Die Zeit für eine Runde ist

$$t \;=\; \frac{s}{v} \;=\; \frac{2(\pi - 2) \cdot r + 2 \cdot a}{b \cdot \sqrt{r}} \;=\; \frac{1}{b} \cdot \left[2(\pi - 2) \cdot r^{\frac{1}{2}} + 2a \cdot r^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Der Kehrenradius r darf dabei maximal so groß sein, dass die geradlinigen Abschnitte gerade verschwinden, also $0 < r \leq \frac{a}{2}$. Für $r \to 0$ strebt t gegen $+\infty$.

b) Es ist günstig, den konstanten Faktor $b > 0$ mit in die Zielfunktion $f(r)$zu stecken:

$$f(r) \;:=\; b \cdot t \;=\; 2(\pi-2)\cdot r^{\frac{1}{2}} + 2a\cdot r^{-\frac{1}{2}} \qquad\qquad 0 < r \leq \frac{a}{2}$$

Für die stationären Stellen dieser Zielfunktion gilt

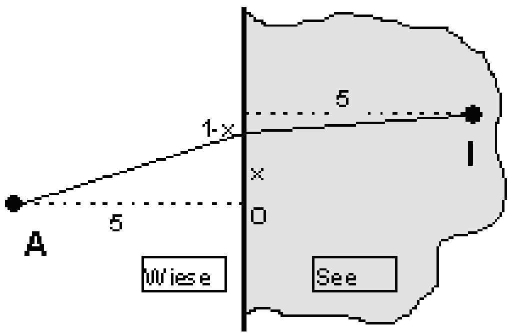
$$f'(r) \;=\; (\pi-2)\cdot r^{-\frac{1}{2}} - a\cdot r^{-\frac{3}{2}} \;=\; r^{-\frac{3}{2}}\cdot[(\pi-2)\cdot r - a] \;\stackrel{!}{=}\; 0$$

Es gibt genau eine Lösung dieser Gleichung

$$r_1 \;=\; \frac{a}{\pi-2}$$

Wegen $\pi - 2 < 2$ ist $r_1 > \frac{a}{2}$. Die Lösung liegt also nicht im zulässigen Bereich. Das Extremum kann also nur am Rand liegen, das heißt bei $r = \frac{a}{2}$. Die Bahn ist dann ein Kreis.

Aufgabe 4. Der Mann rennt geradlinig zum Seeufer an eine Stelle, die wir mit x bezeichnen, gemessen von der Stelle O des Ufers, die der Ausgangsposition des Mannes am nächsten ist. Seine Geschwindigkeit an Land sei v. Auch innerhalb des Sees muss er offensichtlich die direkte Verbindung wählen.



Rechnen wir mit Einheiten von $100m$, so berechnet sich die benötigte Zeit gemäß

$$t \;=\; \frac{1}{v}\cdot\sqrt{x^2+25} \;+\; \frac{5}{v}\cdot\sqrt{(1-x)^2+25}$$

Als Zielfunktion wählen wir

$$f(x) := v\cdot t = \sqrt{x^2+25} + 5\cdot\sqrt{(1-x)^2+25} \qquad\qquad (0 \leq x \leq 1)$$

Diese ist zu minimieren:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+25}} + 5\frac{-2(1-x)}{2\sqrt{(1-x)^2+25}} = \frac{x\sqrt{(1-x)^2+25} - 5(1-x)\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+25}\cdot\sqrt{(1-x)^2+25}} \;\stackrel{!}{=}\; 0$$

Diese Gleichung gilt es zu lösen:

$$0 \;=\; x\sqrt{(1-x)^2+25} - 5(1-x)\sqrt{x^2+25}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & x\sqrt{(1-x)^2+25} \;=\; 5(1-x)\sqrt{x^2+25} \\
\overset{0\leq x\leq 1}{\Leftrightarrow} \quad & x^2\cdot\left[(1-x)^2+25\right] \;=\; 25(1-x)^2\cdot\left[x^2+25\right] \\
\Leftrightarrow \quad & x^2(26-2x+x^2) \;=\; 25(1-2x+x^2)(x^2+25) \\
\Leftrightarrow \quad & x^4-2x^3+26x^2 \;=\; 25(x^4-2x^3+26x^2-50x+25) \\
\Leftrightarrow \quad & g(x) := 24x^4-48x^3+624x^2-1250x+625 \;=\; 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird nun numerisch mit dem Newton-Verfahren gelöst. Die Lösung muss größer als 0.5 sein. Als Startwert eignet sich deshalb etwa $x_0 := 0.75$.

$$g'(x) = 96x^3 - 144x^2 + 1248x - 1250$$

$$x_0 = 0.75 \Rightarrow x_1 \approx 0.82 \Rightarrow x_2 \approx 0.834 \Rightarrow x_3 \approx 0.835 =: a$$

Eine graphische oder numerische (nicht mit Newton!) Überprüfung ergibt, dass zwischen 0 und 1 keine weiteren Nullstellen von g liegen. Zu prüfen bleibt, ob es tatsächlich ein Minimum ist und ob nicht etwa das absolute Minimum am Rand liegt. Der Vergleich mit den Randwerten ergibt

$$f(a) \approx 30.08\ , \quad f(0) \approx 30.49 > f(a)\ , \quad f(1) \approx 30.10 > f(a)$$

Aus diesem Vergleich ergibt sich einerseits, dass das absolute Minimum nicht am Rand liegt. Andererseits kann es sich bei der einzigen stationären Stelle im Intervall $[0,1]$ nur um ein Minimum handeln.

Der Mann muss also eine etwa $83.5m$ von der nächstgelegenen Seestelle (in Richtung Insel) entfernte Stelle des Seeufers anpeilen.