

Thema: Grenzwerte von Folgen

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die nachstehenden Folgen konvergieren und bestimmen Sie Ihren Grenzwert.

- a) $a_n = \frac{5 - 3n}{5n - 3}$
 b) $b_n = \frac{(5 - 3n)^3}{(5n - 3)^3}$
 c) $c_n = \frac{5 - \sqrt{3n}}{5n - 3}$
 d) $d_n = \frac{(3n^2 - 86)^2}{(5n - 7)(2n + 7)^3}$

Aufgabe 2. Untersuchen Sie, ob die Folgen $\langle a_n \rangle$ konvergieren. Berechnen Sie, falls möglich, den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

- a) $a_n = \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2^{n+1}}$
 b) $a_n = \frac{(-3)^n + 2^n}{3^n + 2^{n+1}}$
 c) $a_n = \frac{3^{n+1} + 2^{2n}}{3^n + 2^{n+1}}$
 d) $a_n = \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2^{2n}}$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen mit den angegebenen Gliedern.

- a) $\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - n}$
 b) $n \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$
 c) $\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$

Aufgabe 4. Welche Folgen werden durch die folgenden Bedingungen beschrieben?

- a) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad |a_n| < \varepsilon$
 b) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0 \quad |a_n| < \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad a_n < \varepsilon$

d) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0 \quad a_n < \varepsilon$

Aufgabe 5. Die Folge $\langle x_n \rangle$ sei konvergent mit Grenzwert x . Welche der folgenden Aussagen sind dann richtig?

- a) $x_n \geq 0$ für fast alle $n \Rightarrow x \geq 0$
 b) $x_n > 0$ für fast alle $n \Rightarrow x > 0$
 c) $x \geq 0 \Rightarrow x_n \geq 0$ für fast alle n
 d) $x > 0 \Rightarrow x_n > 0$ für fast alle n
 e) $x \cdot x_n < 0$ für fast alle $n \Rightarrow x < 0$
 f) $x \cdot x_n < 0$ für fast alle $n \Rightarrow x > 0$

Zum Knobeln

Aufgabe 6. Als ein Jäger mit seinem Hund von der Jagd zurückkehrt und noch 100m von seinem Haus entfernt ist, rennt der Hund zum Haus, kehrt dort um und begibt sich zu seinem Herrn zurück. Dort angekommen rennt er wieder zum Haus usw..

Welchen Weg legt der Hund dabei insgesamt zurück, wenn er sich doppelt so schnell bewegt wie der Jäger?

Aufgabe 7. Bestimmen Sie das Bildungsgesetz der Folge O, T, T, F, ... Wie lautet das 83. Glied der Folge?

Hinweis: Die beiden Folgen E, Z, D, V, ... und U, D, T, Q, ... sind nach einer entsprechenden Regel aufgebaut.