Aufgabe 1.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-3n}{5n-3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{5}{n}-3}{5-\frac{3}{n}} = -\dfrac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5-3n)^3}{(5n-3)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5-3n}{5n-3}\right)^3 \overset{(?)}{=} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-3n}{5n-3}\right)^3 = \left(-\dfrac{3}{5}\right)^3 = -\dfrac{27}{125}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-\sqrt{3n}}{5n-3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-\sqrt{3n}}{5n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-\sqrt{3}}{5\sqrt{n}} = 0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n^2-86)^2}{(5n-7)(2n+7)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n^2)^2}{(5n)(2n)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n^4}{5n\cdot 8n^3} = \dfrac{9}{5\cdot 8} = \dfrac{9}{40}$

Aufgabe 2.

a) $\dfrac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2^{n+1}} = \dfrac{3+\frac{2^n}{3^n}}{1+\frac{2\cdot 2^n}{3^n}} = \dfrac{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} \quad \Rightarrow \quad$ konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{1} = 3$

b) $\dfrac{(-3)^n+2^n}{3^n+2^{n+1}} = \dfrac{\frac{(-3)^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}}{1+\frac{2\cdot 2^n}{3^n}} = \dfrac{(-1)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} \quad \Rightarrow \quad$ (unbestimmt) divergent

c) $\dfrac{3^{n+1}+2^{2n}}{3^n+2^{n+1}} = \dfrac{3+\frac{(2^2)^n}{3^n}}{1+\frac{2\cdot 2^n}{3^n}} = \dfrac{3+\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} \quad \Rightarrow \quad$ bestimmt divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

d) $\dfrac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2^{2n}} = \dfrac{3^{n+1}+2^n}{3^n+4^n} = \dfrac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{2}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1} \quad \Rightarrow \quad$ konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{0}{1} = 0$

Aufgabe 3.

a) $\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-n} = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}} =$

$= \dfrac{(n^2+3n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}} = \dfrac{4n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}} = \dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \dfrac{4}{1+1} = 2$

b) $n\cdot\left(1-\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right) = \dfrac{n\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \dfrac{n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} =$

$= \dfrac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{1-x^3}{1-x^2} = \dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x)} \overset{x\neq 1}{=} \dfrac{1+x+x^2}{1+x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Aufgabe 4.
a) $|a_n| < \varepsilon$ bedeutet, dass a_n in der ε-Umgebung von 0 liegt. Durch $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}$ wird ausgedrückt, dass dies für alle n ab einem n_0 gilt, also für fast alle n.

Die Bedingung sagt demnach aus, dass in jeder ε-Umgebung von 0 fast alle Folgenglieder liegen. Sie beschreibt also Nullfolgen.

b) Bei dieser Bedingung muss ein und das selbe n_0 für alle Umgebungen funktionieren. Die Bedingung ist also wesentlich schärfer.

Da gleichartige Quantoren vertauscht werden dürfen, ist die Bedingung die selbe wie

$$\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ \forall_{\varepsilon>0} \quad |a_n| < \varepsilon$$

$\forall_{\varepsilon>0} \quad |a_n| < \varepsilon$ bedeutet aber, dass a_n gleichzeitig in allen ε-Umgebungen von 0 liegt. Dies trifft nur für $a_n = 0$ zu. Dies soll für fast alle n gelten.

Die Bedingung beschreibt also Folgen, deren Glieder fast alle 0 sind. Dies sind in der Tat wesentlich weniger Folgen als bei der vorigen Bedingung.

c) Das Weglassen des Betrages bedeutet, dass negative Glieder die Bedingung $a_n < \varepsilon$ stets erfüllen. Mit Konvergenz hat die Bedingung nicht mehr viel zu tun. Es schwer vorstellbar, wo eine derartige Bedingung nützlich sein könnte.

Die Bedingung beschreibt Folgen, deren positive Glieder gegen 0 konvergieren. Die anderen können tun und lassen, was sie wollen.

d) Die Bedingung ist die selbe wie

$$\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ \forall_{\varepsilon>0} \quad a_n < \varepsilon$$

$\forall_{\varepsilon>0} \quad a_n < \varepsilon$ bedeutet aber, dass $a_n \leq 0$ ist.

Die Bedingung beschreibt Folgen, deren Glieder fast alle ≤ 0 sind.

Aufgabe 5.
a) Die Aussage ist richtig. Wäre nämlich $x < 0$, dann wäre $(-\infty, 0)$ eine Umgebung von x. Wegen der Konvergenz müssten in dieser fast alle Glieder liegen. Fast alle Glieder wären also negativ. Dies widerspricht offenbar der Voraussetzung, dass $x_n \geq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Wie diese Überlegung zeigt, genügt schon die Voraussetzung, dass $x_n \geq 0$ für unendlich viele n:

$$x_n \geq 0 \text{ für unendlich viele } n \quad \Rightarrow \quad x \geq 0$$

Entsprechendes gilt offenbar für $\leq$ statt $\geq$:

$$x_n \leq 0 \text{ für unendlich viele } n \quad \Rightarrow \quad x \leq 0$$

b) Die Aussage ist falsch. Ein einfaches Gegenbeispiel ist die Folge mit $x_n = \frac{1}{n}$. Offenbar erfüllt diese Folge die Voraussetzung $x_n > 0$ sogar für alle n. Der Grenzwert x ist aber gleich 0, also nicht echt positiv.

Hinweis: Bei einer Ungleichung kann man also wie bei Gleichungen links und rechts einen Grenzübergang vornehmen, muss dabei aber unbedingt beachten, dass aus echten Ungleichungen ($<$, $>$) dabei stets unechte $\leq$, $\geq$) werden.

c) Die Aussage ist falsch. Ein einfaches Gegenbeispiel ist die Folge mit $x_n = -\frac{1}{n}$. Sie hat den Grenzwert $x = 0$. Sämtliche Folgenglieder sind aber echt negativ.

d) Die Aussage ist richtig. Wegen $x > 0$ ist nämlich $(0, \infty)$ eine Umgebung von x. Wegen der Konvergenz liegen in dieser fast alle Glieder. Für fast alle Glieder gilt also $x_n \in (0, \infty)$, was nur eine andere Schreibweise für $x > 0$ ist.

Hinweis: Entsprechendes gilt natürlich für $x < 0$:

$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad x_n < 0 \text{ für fast alle } n$$

e) Die Aussage ist richtig. Zunächst ergibt sich aus $x \cdot x_n < 0$ (es genügt, dass dies für ein n gilt) $x \neq 0$. Wäre die Behauptung $x < 0$ falsch, dann müsste somit $x > 0$ gelten. Die vorige Teilaufgabe zeigt, dass dann für fast alle Glieder $x_n > 0$ sein müsste. Dann wäre aber $x \cdot x_n$ für fast alle n als Produkt positiver Zahlen ebenfalls positiv. Dies ist ein Widerspruch.

f) Die Aussage ist richtig. Zunächst ergibt sich aus $x \cdot x_n < 0$ (es genügt, dass dies für ein n gilt) $x \neq 0$. Wäre die Behauptung $x > 0$ falsch, dann müsste somit $x < 0$ gelten. Die vorige Teilaufgabe zeigt, dass dann für fast alle Glieder $x_n < 0$ sein müsste. Dann wäre aber $x \cdot x_n$ für fast alle n als Produkt zweier negativer Zahlen positiv. Dies ist ein Widerspruch.

Hinweis: Aus $x \cdot x_n < 0$ für fast alle n folgt also sowohl $x < 0$ als auch $x > 0$! Wie kann das sein. Nun: Die Voraussetzung ist immer (für alle Folgen) falsch. Die Voraussetzung bedeutet, dass fast alle Folgenglieder das umgekehrte Vorzeichen vom Grenzwert $x \neq 0$ haben. Wir wissen aber, dass für echt positive Grenzwerte auch fast alle Glieder positiv sind und für echt negative Grenzwerte auch fast alle Glieder negativ sind.

Aufgabe 6. Der Abstand zum Haus sei allgemein $a > 0$. Wenn der Hund zum ersten Mal das Haus erreicht, hat der Jäger gerade die Strecke $\frac{1}{2}a$ zurückgelegt, ist also noch $\frac{1}{2}a$ vom Haus entfernt.

Nun bewegen die beiden sich aufeinander zu. Bis zum Treffpunkt legt der Hund die doppelte Strecke zurück wie der Jäger. Die Strecke $\frac{1}{2}a$ muss also in $1 + 2$ Teile geteilt werden, von denen auf den Jäger ein Teil und auf den Hund zwei Teile, also $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{3}a$, entfallen. Insgesamt rennt der Hund also bis zum nächsten Treppunkt die Strecke

$a + \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}a$. Die beiden sind dann noch $\frac{1}{3}a$ vom Haus entfernt, nämlich genau die Strecke, welche der Hund vom Haus aus gelaufen ist.

Bis zum darauf folgenden Treffpunkt rennt er folglich $\frac{4}{3}$ des neuen Abstandes $\frac{1}{3}a$, also $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}a$. Setzt man dies fort und summiert alle Teilstrecken auf, ergibt sich für den gesamten Weg s des Hundes

$$s = \frac{4}{3}a + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}a + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}a + \ldots = \frac{4}{3}a \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k =$$

$$= \frac{4}{3}a \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{4}{3}a \cdot \frac{3}{2} = 2a$$

Der vom Hund zurückgelegte Weg ist also $s = 2 \cdot 100m = 200m$.

Kann es Zufall sein, dass der Weg genau das doppelte der Entfernung zum Haus ist? Nein! Weil sich der Hund doppelt so schnell bewegt wie der Jäger, legt er in der gleichen Zeit immer die doppelte Strecke zurück wie der Jäger. Dabei ist es gleichgültig, ob er zwischen Haus und Jäger pendelt oder sonst irgendwo herum rennt.

Aufgabe 7. **O**ne, **T**wo, **T**hree, **F**our, ... Das 83. Glied lautet also E (**E**ighty-three).

Die analoge Folge E, Z, D, V, ... hat das Bildungsgesetz **E**ins, **Z**wei, **D**rei, **V**ier ... Das 83. Glied ist hier D (**D**reiundachtzig).

Die Folge U, D, T, Q, ... entsteht gemäß **U**n, **D**eux, **T**rois, **Q**uatre, ... Das 83. Glied ist Q (**Q**uatre-vingt trois).