HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **Winter-Semester 2016/2017**

KLAUSURARBEIT IM BACHELOR-STUDIENGANG MATHEMATIK

MODUL:	**Analysis 2**	FACH:	**Analysis B**
DATUM:	8. Februar 2017	ZEIT:	8:30 – 10:30
PRÜFER:	Wolfgang Erben	SEMESTER:	MB2

HILFSMITTEL: **ein Blatt DIN A4**, beidseitig eigenhändig handschriftlich beschrieben.
Taschenrechner und jegliche telekommunikationsfähige Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Diese Aufgabenblätter sollten aus **3 Seiten** bestehen und Sie sollten **4 karierte Doppelbögen** erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen, müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen. Die vorliegenden Aufgabenblätter sollen **nicht** abgegeben werden.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die **Anwendbarkeit** von Regeln und Sätzen muss begründet sein. Dies gilt insbesondere für den *Zwischenwertsatz* und den *Satz von Weierstraß*.

Aufgabe 1. *(30 Punkte)* Vorgelegt seien die Funktionen f_1, f_2 und f aus $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \frac{1}{x+1}\ ; \qquad f_2(x) = \frac{x+1}{x^2+1}\ ; \qquad f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{1}{x+1}$$

a) Entwickeln Sie f_1 und f_2 in Taylor-Reihen (um 0). Geben Sie die Reihen in Summen-Schreibweise an. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

b) Geben Sie die Taylor-Reihe von f in aufzählender Schreibweise mit mindestens fünf nicht verschwindenden Gliedern an. Wo konvergiert die Reihe? Welchen Konvergenzradius besitzt sie?

c) Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Taylor-Polynoms von f, dass an der Stelle 0 ein Sattelpunkt vorliegt.

d) Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ mit $F(1) = 0$. Ist diese Stammfunktion auf ganz $D(f)$ eindeutig festgelegt? Geben Sie einen präzisen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

e) Stellen Sie $F(x)$ als Potenzreihe in aufzählender Schreibweise mit mindestens fünf nicht verschwindenden Gliedern dar. Wo konvergiert diese Reihe gegen $F(x)$?

Aufgabe 2. *(30 Punkte)*

a) Berechnen Sie mittels Variation der Konstanten in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} + ax = t$.

b) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = ay + \frac{x}{2y}$. Verwenden Sie dazu die Substitution $z = y^2$.

c) Zeigen Sie, dass $y_1(x) = x \cdot e^{2x}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y^{(4)} - 4y'' - 16y' + 32y = 0$ ist und die Anfangsbedingungen $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 4,\ y'''(0) = 12$ erfüllt.

d) Geben Sie ohne weitere Rechnung diejenige Lösung $y_2(x)$ der Differentialgleichung $y^{(4)} - 4y'' - 16y' + 32y = 0$ an, die den Anfangsbediungungen $y(87) = 0,\ y'(87) = 1,\ y''(87) = 4,\ y'''(87) = 12$ genügt. Welche Eigenschaft der Differentialgleichung macht dies möglich?

e) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y^{(4)} - 4y'' - 16y' + 32y = 1024$.

Aufgabe 3. *(30 Punkte)*

a) Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 \cdot \sqrt{9+y^2}$ nach unten, aber nicht nach oben beschränkt ist. Bestimmen Sie alle stationären Stellen sowie den Wertebereich $W(f)$.

b) Berechnen Sie die Tangentialebenen an den beiden Stellen $(-1, \pm\frac{3}{2})$.

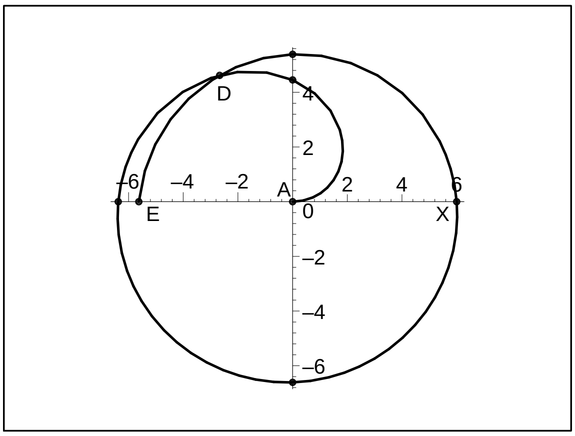
c) Gegeben sei das vom Parameter $\alpha \geq -1$ abhängige Rechteck $R_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ mit $R_\alpha = [-1,\alpha] \times [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Bestimmen Sie $f(R_\alpha)$, $f(\partial R_\alpha)$ und $f(R_\alpha \setminus \partial R_\alpha)$.

d) Geben Sie für die Funktion $g_\alpha = f\,|R_\alpha$ den Wertebereich $W(g_\alpha)$ sowie $g_\alpha^{-1}(\{0\})$ an.

Aufgabe 4. *(30 Punkte)*

Die nachstehend skizzierte Kurve K kann in Polarkoordinaten beschrieben werden durch

$$r = r(t) = \frac{1}{3}t^3 - t + 6 \;, \quad \varphi = \varphi(t) = \frac{2\pi}{3}t \quad ; \qquad t \in [-3, \frac{3}{2}]$$



a) Zeigen Sie, dass der Punkt $A(0,0)$ auf der Kurve liegt und geben Sie die Gleichung der Tangente in A an. Ermitteln Sie auch die Tangente im markierten Schnittpunkt X mit der x-Achse.

b) Zeigen Sie, dass der Abstand der Kurvenpunkte vom Ursprung an den Stellen $t_1 = -1$ und $t_2 = +1$ relative Extrema annimmt. Welche Steigungen besitzen die Tangenten an diesen Stellen?

c) Geben Sie den zu $t_1 = -1$ gehörenden Kurvenpunkt B_1 in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten an.

d) Zeigen Sie, dass die Kurve K glatt ist. Geben Sie für K eine zulässige Parameterdarstellung $\underline{x}(t)$ mit negativer Orientierung an.

e) Bestimmen Sie den Doppelpunkt D in Polarkoordinaten. Berechnen Sie den Inhalt G der gesamten, von K umschlossenen Fläche. Es sei bereits bekannt, dass $\int_{-2}^{1} r(t)^2\,dt = \frac{11723}{105}$. (Das soll also nicht nachgerechnet werden.) Zeigen Sie durch Vergleich mit geeigneten Kreisscheiben, dass $\frac{256}{9}\pi \leq G \leq \frac{400}{9}\pi$.