HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **Winter-Semester 2014 / 2015**

KLAUSURARBEIT IM BACHELOR-STUDIENGANG MATHEMATIK

MODUL:	**Analysis 2**	FACH:	**Analysis B**
DATUM:	3. Februar 2015	ZEIT:	14:00 – 16:00
PRÜFER:	Dr. Wolfgang Erben	SEMESTER:	MB2

HILFSMITTEL: **ein Blatt DIN A4**, beidseitig eigenhändig handschriftlich beschrieben.
Taschenrechner und jegliche telekommunikationsfähige Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Diese Aufgabenblätter sollten aus **4 Seiten** bestehen und Sie sollten **4 karierte Doppelbögen** erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen, müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen. Die vorliegenden Aufgabenblätter sollen **nicht** abgegeben werden.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die Anwendbarkeit von Regeln muss begründet sein.

Aufgabe 1. *(26 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion

$$f^*(x) = \frac{\sinh x - \sin x}{x}$$

a) Zeigen Sie, dass $f^*(x)$ für alle $x \neq 0$ durch eine Potenzreihe um $x = 0$ dargestellt werden kann. Geben Sie diese Reihe sowohl in Summenschreibweise an, als auch in aufzählender Schreibweise mit mindestens vier nicht verschwindenden Gliedern.

b) Zeigen Sie, dass f^* zu einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden kann. Geben Sie $f^{(2014)}(0)$, $f^{(2015)}(0)$ und $f^{(2016)}(0)$ an.

c) Zeigen Sie, dass das Infimum von $f(x)$ an genau einer Stelle angenommen wird. Geben Sie an der Stelle $x = 0$ die Gleichung der Tangente und die Krümmung an.

d) Entwickeln Sie die Funktion zweier Veränderlicher $F(x, y) = \int\limits_x^y f(t)\,dt$ in eine Taylorreihe um $(0, 0)$. Für welche (x, y) konvergiert diese Reihe gegen $F(x, y)$?

Aufgabe 2. *(34 Punkte)*

Gegeben sei die von $n \in \mathbb{N}_0$ abhängige Differentialgleichung für $y(x)$

$$(1 + n^2x^2) \cdot y' \; = \; y^n$$

a) Für welche beiden Werte von n ist die Differentialgleichung linear? Prüfen Sie jeweils, ob die Gleichung homogen oder inhomogen ist. Wie lautet die allgemeine Lösung $y_{allg}(x)$ in den beiden Fällen.

b) Für welche Werte von n ist die Gleichung autonom? Für welche Werte von n ist sie separabel? Geben Sie in Abhängigkeit von n die allgemeine Lösung $y_{allg}(x)$ der Differentialgleichung in impliziter Form an. (Eine Auflösung nach y ist also nicht verlangt.)

c) Zeigen Sie, dass für gerades n alle Lösungen der Differentialgleichung monoton wachsend sind. Geben Sie für $n = 1$ alle streng monoton fallenden Lösungen an.

d) Berechnen Sie (in expliziter Form und inklusive Definitionsbereich) die Lösung $y_1(x)$ des Anfangswertproblems

$$(1 + 16x^2) \cdot y' \; = \; y^4 \quad , \qquad y(0) = -\sqrt[3]{\frac{16}{3\pi}}$$

e) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$ die Lösung $y_2(x)$ des Anfangswertproblems

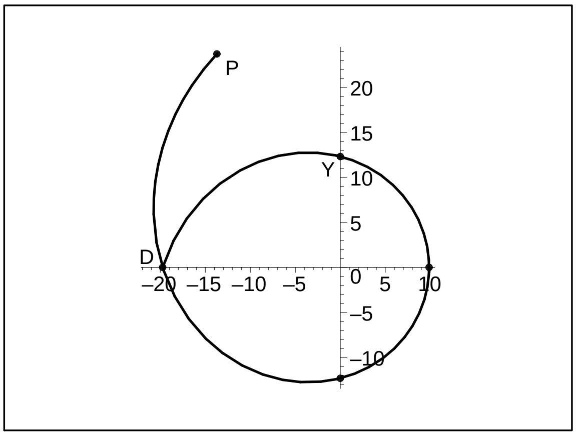
$$(1 + n^2 x^2) \cdot y' \;=\; y^n \quad , \qquad y(87) = 0$$

Aufgabe 3. *(30 Punkte)*

Die nachstehend skizzierte Kurve K kann in Polarkoordinaten beschrieben werden durch

$$K: \quad r \;=\; r(\varphi) \;=\; \varphi^2 + \pi^2 \; ; \qquad \varphi \in [-\frac{4}{3}\pi, \pi]$$

a) Zum Winkel $\varphi = -\frac{4\pi}{3}$ gehört der markierte Kurvenpunkt P. Geben Sie für P die Polarkoordinaten (r_P, φ_P) und die kartesischen Koordinaten (x_P, y_P) an.



b) Zeigen Sie, dass die Kurve glatt ist. Geben Sie für K eine zulässige Parameterdarstellung mit P als Anfangspunkt an und eine zweite mit P als Endpunkt.

c) Bestimmen Sie im Schnittpunkt Y mit der positiven y-Achse die Tangente in der Form $y = mx + b$.

d) Zeigen Sie, dass die Kurve K genau einen Doppelpunkt D besitzt. Berechnen Sie den Inhalt F der von der Kurve K vollständig eingeschlossenen Fläche.

e) Geben Sie eine geschlossene Teilkurve K_g von K in Polarkoordinaten an. Ist diese Kurve glatt? Ist sie doppelpunktfrei?

Aufgabe 4. *(30 Punkte)*

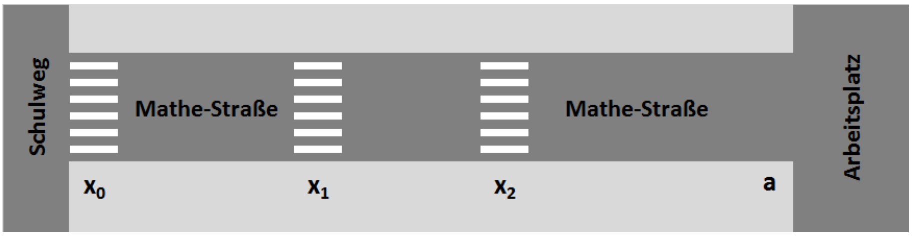
a) Zeigen Sie, dass die vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_a(x, y) = x^2 + (y - x)^2 + 2(a - y)^2$$

genau eine stationäre Stelle besitzt. Prüfen Sie, ob es sich um ein relatives Minimum, ein relatives Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.

b) Begründen Sie, dass f_a unter der Nebenbedingung $y = a$ ein absolutes Minimum besitzt. Bestimmen Sie dieses Minimum.

c) Vom holprigen Schulweg führt die Mathe-Straße (der Länge a) direkt und absolut geradlinig zum schönen Arbeitsplatz, wie nachstehende Skizze zeigt. Am unteren Ende ($x_0 = 0$) der Mathe-Straße befindet sich bereits ein Zebrastreifen, zwei weitere (bei $x_1 > x_0$ und $x_2 > x_1$) sollen hinzukommen. Dies soll so geschehen, dass entlang der Mathe-Straße die mittlere Entfernung zu einem Zebrastreifen möglichst klein ist.



Die mittlere Entfernung ergibt sich (wie in der folgenden Teilaufgabe nachgerechnet werden soll) zu $d(x_1, x_2) = \frac{1}{4a} f_a(x_1, x_2)$. Wie sind nun x_1 und x_2 zu wählen? Wie weit ist es dann im Mittel bis zum nächsten Überweg? Die Breite der Überwege ist zu vernachlässigen.

d) Schreiben Sie die Entfernung $\delta(x, x_1, x_2) = \min\limits_{0 \leq i \leq 2} |x - x_i|$ einer Stelle $x \geq 0$ der Mathe-Straße zum nächstgelegenen Zebrastreifen als stückweise definierte lineare Funktion. Zeigen Sie, dass sich der mittlere Abstand $d(x_1, x_2) := \frac{1}{a} \int\limits_0^a \delta(x, x_1, x_2)\ dx$ zum nächstgelegenen der drei Zebrastreifen zu $d(x_1, x_2) = \frac{1}{4a} f_a(x_1, x_2)$ ergibt.