HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **Winter-Semester 2012/2013**

KLAUSURARBEIT IM BACHELOR-STUDIENGANG MATHEMATIK

MODUL:	**Analysis 1**	FACH:	**Analysis A**
DATUM:	5. Februar 2013	ZEIT:	10:30 – 12:30
PRÜFER:	Drs. Preissler, Reitz, Erben	SEMESTER:	MB1A und MB1B

HILFSMITTEL: Skript (1-2 Ordner) und 2 Bücher (inklusive Formelsammlung). Taschenrechner sind ausdrücklich nicht zugelassen.

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

- Sie sollten **6 karierte Doppelbögen** und 2 Konzeptblätter erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen, müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die Anwendbarkeit von Regeln muss begründet sein.
- Diese Aufgabenblätter und das Konzeptpapier sollen **nicht** abgegeben werden.

Aufgabe 1. *(11 Punkte)*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - \cot x}{\sin x - \cos x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} x(\ln(x+2) - \ln(x+1))$ c) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1 - e^{-x^2}}{x^2}$

Aufgabe 2. *(18 Punkte)*
a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f_a(x) \;=\; \frac{a}{e^{2x} \;+\; a}$$

in Abhängigkeit des reellen Parameters a den maximalen Definitionsbereich $D(f_a)$ und berechnen Sie $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x)$.

b) Zeigen Sie, dass f_a für $a > 0$ streng monoton ist, nicht aber für $a \leq 0$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f_a injektiv? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion f_a^{-1} inklusive ihres Definitionsbereiches $D(f_a^{-1})$.

Aufgabe 3. *(15 Punkte)*
a) Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^4 - 16$ in komplexe Linearfaktoren und geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 - 16 = 0$ an.

b) Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 + 16i = 0$ in Exponentialdarstellung an. Zeichnen Sie die Lösungen in der komplexen Zahlenebene.

c) Stellen Sie die komplexe Zahl $1 - \sqrt{3}\,i$ in Exponentialdarstellung dar.

Für welche $a \in \mathbb{C}$ ist $1 - \sqrt{3}\,i$ eine Lösung der Gleichung $z^4 + 16a = 0$?

Geben Sie a dabei in kartesischer Darstellung an.

Aufgabe 4. *(23 Punkte)*
Die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = \alpha \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = a_n^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

a) Es sei $\alpha \geq 1$. Zeigen Sie zunächst mit vollständiger Induktion, dass $a_n \geq 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie anschließend, dass (a_n) monoton wachsend ist.

b) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) für $0 < \alpha \leq 1$ monoton fallend ist.

c) Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von α) den Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$, sowie $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}_0} a_n$ und $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} a_n$. Unterscheiden Sie dabei verschiedene Fälle, mindestens $\alpha \geq 0$ und $\alpha < 0$.

Aufgabe 5. *(30 Punkte)*

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \dfrac{-x^5 - x^4}{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas, dass $x = -1$ und $x = 2$ Nullstellen des Nenners von f sind.
Bestimmen Sie die restlichen Nullstellen des Nenners.

b) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Nullstellen, Polstellen und Asymptoten von f. Zeigen Sie, dass für den echt gebrochenrationalen Anteil $g(x)$ von $f(x)$ gilt: $g(x) = \dfrac{-17x^2 + 36x - 20}{(x-1)(x-2)^2}$.

c) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von g.

d) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale $\int g(x)\,dx$ und $\int f(x)\,dx$.

e) Existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_3^\infty g(x)\,dx$?

Aufgabe 6. *(23 Punkte)*

Die nebenstehende Figur entsteht durch Spiegelungen der Parabel

$$y = x^2 + \frac{9}{2}x\ , \qquad x \in [-\frac{9}{2}, 0]$$

Berechnen Sie den Radius des kleinsten Kreises, welcher die gesamte Figur umfasst. Wie lautet die Gleichung dieses Kreises?

Hinweis: Bestimmen Sie den Punkt auf der Parabel, der den größten Abstand vom Ursprung hat.