

FACH : Analysis A

NAME :

DATUM : 14.01.2009

SEMESTER : M 1

ZEIT : 08.30 – 10.30

PRÜFER : Prof. Dr. Erben / Prof. Dr. Fischer

HILFSMITTEL : Skript mit eigenen Unterlagen, zwei Bücher

ANLAGEN : keine

Die angegebenen Punktzahlen (Summe 120) dienen zu Ihrer Orientierung; die endgültige Wertung kann davon noch abweichen.

Ihre Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der Gang der Rechnung nachvollziehbar ist.

**Aufgabe 1** (20 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{x}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+1))$

**Aufgabe 2** (13 Punkte)

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die  $n$ -te Ableitung der Funktion  $f(x) = \cos x$  gegeben ist durch

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

**Hinweis:** Verwenden Sie die Beziehung  $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ .

b) Wie lautet eine entsprechende Formel für die  $n$ -te Ableitung der Funktion  $g(x) = \sin x$ ? (keine Begründung erforderlich)

**Aufgabe 3** (35 Punkte)

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \ln(4x - x^2)$ .

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich  $D(f)$  und alle Nullstellen von  $f$  an.

b) Wie verhält sich  $f(x)$ , wenn sich  $x$  den Randpunkten von  $D(f)$  nähert?

c) Geben Sie  $f'(x)$  und  $f''(x)$  an.

d) Zeigen Sie: Für alle  $x \in D(f)$  gilt  $f''(x) < 0$ .

e) Warum besitzt  $f$  genau ein globales Maximum auf  $D(f)$ ? Geben Sie diese Stelle und den zugehörigen Funktionswert an.

f) Skizzieren Sie den Graphen von  $f$  in einem geeigneten Maßstab. Sie können dazu die Werte  $\ln 2 = 0.693 \dots$  und  $\sqrt{3} = 1.732 \dots$  verwenden.

**Aufgabe 4** (22 Punkte)

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 7x$  mit  $D(f) = \mathbb{R}$ .

- a) Berechnen Sie  $f'(x)$ . Bestätigen Sie mit dem Horner-Schema, dass die Ableitung  $f'$  an der Stelle  $x = -1/2$  verschwindet. Zeigen Sie, dass dies die einzige stationäre Stelle ist.
- b) Begründen Sie, warum die Funktion  $f$  an der stationären Stelle ihr absolutes Minimum erreicht. Berechnen Sie den zugehörigen Funktionswert mit dem Horner-Schema. Geben Sie den Wertebereich  $W(f)$  der Funktion  $f$  an.
- c) Zeigen Sie: Für alle  $x \in D(f)$  gilt  $f''(x) \geq 0$ , und es gibt genau eine Stelle  $x$  mit  $f''(x) = 0$ . Geben Sie diese Stelle an.

**Aufgabe 5** (30 Punkte)

Gegeben ist die Parabel  $y = a - x^2$  mit dem Parameter  $a > 0$ .

Gesucht ist der größte Kreis um  $(0, 0)$ , der ganz „innerhalb“ der Parabel liegt.

Geben Sie den Radius dieses Kreises in Abhängigkeit von  $a$  an.

**Hinweis:** Bestimmen Sie den Punkt auf der Parabel, der den kleinsten Abstand vom Ursprung hat.