HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART **Sommer-Semester 2015**

KLAUSURARBEIT IM BACHELOR-STUDIENGANG MATHEMATIK

MODUL:	**Analysis 1**	FACH:	**Analysis A**
DATUM:	9. Juli 2015	ZEIT:	11:00 – 13:00
PRÜFER:	Wolfgang Erben	SEMESTER:	MB1

HILFSMITTEL: **ein Blatt DIN A4**, beidseitig eigenhändig handschriftlich beschrieben.
Taschenrechner und jegliche telekommunikationsfähige Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.

ANLAGEN: keine

UNBEDINGT BEACHTEN:

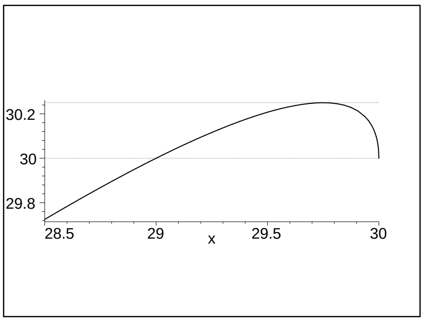
- Diese Aufgabenblätter sollten aus **3 Seiten** bestehen und Sie sollten **5 karierte Doppelbögen** erhalten haben. Bitte kontrollieren Sie das.
- Gewertet werden nur Bearbeitungen auf den ausgeteilten karierten Doppelbögen. Für jede Aufgabe ist ein **eigener Doppelbogen** zu verwenden.
- **Bevor** Sie beginnen, müssen auf allen Doppelbögen **Name, Semester und Aufgaben-Nummer** eingetragen sein.
- **Alle** karierten Doppelbögen müssen abgegeben werden, selbst wenn sie keinerlei Bearbeitung enthalten. Dies betrifft auch eventuell zusätzlich angeforderte Doppelbögen. Die vorliegenden Aufgabenblätter sollen **nicht** abgegeben werden.
- Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der **Rechenweg** nachvollziehbar ist. Die Anwendbarkeit von Regeln muss begründet sein.

Aufgabe 1. *(30 Punkte)* Gegeben seien die nebenstehend skizzierte Funktion f aus $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x + \sqrt{30 - x}$$

und die daraus gebildete Funktion g mit

$$g(x) = \ln(-x - \sqrt{30 - x}) = \ln(-f(x))$$



a) Bestimmen Sie die (maximalen) Definitionsbereiche der beiden Funktionen. Geben Sie die Urbilder $f^{-1}((-\infty, 0))$ und $g^{-1}(\mathbb{R})$ an.

b) Überprüfen Sie die beiden Funktionen auf stationäre Stellen. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein Extremum handelt.

c) Bestimmen Sie die Wertebereiche der beiden Funktionen. Geben Sie für f Supremum und Infimum an.

d) Zeigen Sie, dass g injektiv ist, nicht aber f. Geben Sie $f^{-1}(\{30\})$ an, wofür ausnahmsweise keine Begründung verlangt ist. Ist eine der beiden Funktionen bijektiv?

Aufgabe 2. *(27 Punkte)*

a) Geben Sie die Nullstellen z_1 bis z_5 des Polynoms $1 - z^5$ in Exponentialdarstellung an. Ermitteln Sie damit die komplexen Lösungen der Gleichungen $z^5 = 1024$, $z^5 = 4\sqrt{2}$ und $z^5 = -1$, ebenfalls in Exponentialdarstellung. Achten Sie stets darauf, dass das Argument bei der Exponentialdarstellung im Bereich $[0, 2\pi)$ liegt.

b) Zeigen Sie, dass die Zahl $w = \frac{1}{4}(\sqrt{10} - \sqrt{2}) + \frac{i}{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}} \in \mathbb{C}$ den Betrag $\sqrt{2}$ hat. Berechnen Sie $\frac{w}{|w|}$ und $|\frac{1}{w}|$.

c) Für dieses w sei bekannt - braucht also nicht nachgerechnet zu werden -, dass w^5 eine positive reelle Zahl a ergibt. Welchen Wert hat a? Welches Argument besitzt w?

d) Zeigen Sie, dass $\frac{w^2}{|w^2|} = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) + \frac{i}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Geben Sie die Nullstellen z_1 bis z_5 von $1 - z^5$ in kartesischer Darstellung an.

Aufgabe 3. *(16 Punkte)* Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + x \cdot \sin ax}{\frac{9}{2}x^2 - 1 + \cos ax}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + x \cdot \sin ax}{\frac{9}{2}x^2 - 1 + \cos ax}$

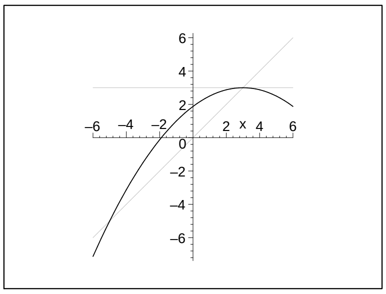
Aufgabe 4. *(28 Punkte)* Die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Folge $\langle x_n \rangle$ sei mit Hilfe der nachstehend skizzierten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$x_0 = s \quad \text{und} \quad x_{n+1} = f(x_n) \ \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, \text{ wobei} \quad f(x) = \frac{1}{8}(15 + 6x - x^2)$$

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $s \in [-5, 3]$ die ganze Folge $\langle x_n \rangle$ im Intervall $[-5, 3]$ liegt. Begründen Sie dazu zunächst, dass $f([-5, 3]) = [-5, 3]$.

b) Zerlegen Sie $g(x) = f(x) - x$ in Linearfaktoren. Beweisen Sie hiermit, dass die Folge für $-5 \leq s \leq 3$ monoton wachsend und für $s < -5$ streng monoton fallend ist.

Hinweis: Entsprechend zu a) liegt für $s \in (-\infty, -5)$ die ganze Folge $\langle x_n \rangle$ im Intervall $(-\infty, -5)$. Das kann ohne Nachweis verwendet werden.



c) Berechnen Sie $f(11)$ mit Hilfe des Horner-Schemas. Für zwei Werte s_1 und s_2 von s ist die Folge konstant, für einen dritten Wert s_3 fast - also ab einem bestimmten Glied - konstant. Geben Sie s_1, s_2 und s_3 an.

d) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} -\infty & \text{für} \quad s < -5 \\ -5 & \text{für} \quad s = -5 \\ 3 & \text{für} \quad -5 < s \leq 3 \end{cases}$$

Geben Sie (ohne Begründung) den Grenzwert auch für $s > 3$ an.

Aufgabe 5. *(19 Punkte)* Zeigen Sie, dass die nachfolgenden Integrale die angegebenen Werte besitzen. Führen Sie dazu zunächst jeweils die Substitution $x = e^t$ durch.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{e^t + 2} = \ln\sqrt{3}$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln\pi - 2\ln 2} e^{2t} \sin e^t \, dt = \frac{4-\pi}{8}\sqrt{2}$