HOCHSCHULE FÜR TECHNIK STUTTGART | STUDIENGANG MATHEMATIK

PRÜFUNGSLEISTUNG IM SOMMER–SEMESTER 2008 FÜR DIE BACHELORVORPRÜFUNG

FACH :	Analysis B	NAME :	
DATUM :	14.07.2008	SEMESTER :	M 2
ZEIT :	08.30 – 10.30		
PRÜFER :	Prof. Dr. Erben / Prof. Dr. Fischer		

HILFSMITTEL : Skript mit eigenen Unterlagen, zwei Bücher

ANLAGEN : keine

Die angegebenen Punktzahlen (Summe 120) dienen zu Ihrer Orientierung; die endgültige Wertung kann davon noch abweichen.

Ihre Ergebnisse können nur gewertet werden, wenn der Gang der Rechnung nachvollziehbar ist.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(t) = e^{6t} \cdot \sin\left(e^{3t}\right)$ für $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie das unbestimmte Integral $\int f(t)\,dt$ mit Hilfe der Substitution $u = e^{3t}$.

b) Geben Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ an.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Gegeben ist eine ebene Kurve mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{und} \quad y(t) = \frac{t}{1+t^2}\,.$$

a) Bestimmen Sie die Bogenlänge des Kurvenstücks für $0 \le t \le 1$.

b) Welche Kurvenpunkte ergeben sich für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$?

c) Bestimmen Sie die Bogenlänge des Kurvenstücks für $-\infty < t < \infty$.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Gegeben ist die Funktion zweier Veränderlicher

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - \frac{3}{5}\,x\,.$$

a) Zeigen Sie, dass diese Funktion genau zwei stationäre Stellen besitzt, wovon eine zu einem relativen Minimum, die andere zu einem Sattelpunkt gehört.

b) Geben Sie die Tangentialebenen der Fläche $z = f(x, y)$ an den Stellen $(0, 3)$ und $(3, 0)$ an.

c) Entwickeln Sie f in eine Taylor-Reihe um $(0, 0)$ bis zu den Gliedern vierter Ordnung.

Hinweis: Verwenden Sie dazu die Taylor-Reihe der Funktion $\ln(1 + u)$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Betrachtet werden alle Ellipsen der Form $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad$ mit $a, b > 0$,
auf denen der Punkt $P(3, 1)$ liegt.

a) Bestimmen Sie diejenige Ellipse, deren Flächeninhalt $F = \pi\, a\, b$ minimal ist. Ein Nachweis, dass Ihre Lösung ein Minimum darstellt, ist nicht erforderlich.

b) Vergleichen Sie den Flächeninhalt der von Ihnen bestimmten Ellipse mit dem Flächeninhalt des Kreises um den Nullpunkt, auf dem der Punkt P liegt. Prüfen Sie nach, dass der Flächeninhalt der Ellipse kleiner als der des Kreises ist.

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung $\quad y' = x \cdot (1 - y^2)$.

a) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen.

b) Geben Sie die Lösung $y_1(x)$ mit $y_1(0) = 1$ an.

c) Geben Sie die Lösung $y_2(x)$ mit $y_2(0) = 0$ an.

Aufgabe 6 (25 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' + xy = x^3$.

b) Welche Lösung aus Teil a) erfüllt die Anfangsbedingung $y(0) = 0$? Auf welchem Intervall stellt diese Funktion eine Lösung des Anfangswertproblems dar?

c) Wenn Sie Teil b) richtig gelöst haben, sollten Sie eine gerade Funktion erhalten haben. Entwickeln Sie diese Funktion in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$ bis zum Glied sechster Ordnung.