Thema: Polynome

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass das Polynom

$$f(x) = x^2 + 2x^3 - 2x^4$$

für alle (reellen) x kleiner als 1 ist.

Aufgabe 2. Für welche Werte von a hat die Funktion

$$f_a(x) = x^3 + 3x^2 - a$$

eine, zwei oder drei Nullstellen?

Hinweis: Untersuchen Sie die Extrema.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle Nullstellen der folgenden Polynome:

a) $z^5 - 2z^4 + z - 2$

b) $\frac{1}{4}z^6 + z^3 + 2$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass $(1 + i)$ eine Lösung der Gleichung

$$z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4 = 0$$

ist und geben Sie die restlichen Nullstellen an.

Aufgabe 5. Zerlegen Sie das Polynom $4z^3 + 12z^2 + 4z$ in Linearfaktoren.

Aufgabe 6. (Zwischenprüfung SS 98)

a) Stellen Sie die Menge

$$M_a = \{z \in \mathbb{C} \mid 3 \leq |z - 2i| \leq 5\}$$

graphisch in der Gaußschen Zahlenebene dar.

b) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen z_{b1}, z_{b2} der Gleichung

$$z^2 + 6z + 13 = 0$$

Berechnen Sie die beiden Quotienten $\frac{z_{b1}}{z_{b2}}$ und $\frac{z_{b2}}{z_{b1}}$ sowie deren Beträge.

c) Die Gleichung

$$z^6 + 11z^5 + 44z^4 + 76z^3 + 43z^2 + 65z = 0$$

hat die reelle Lösung $z_{c1} = -5$ und die rein imaginäre Lösung $z_{c2} = -i$. Zeigen Sie dies mit Hilfe des Horner-Schemas und bestimmen Sie die restlichen Lösungen z_{c3} bis z_{c6} der Gleichung.

d) Zeichnen Sie die Lösungen z_{c1} bis z_{c6} als Punkte in die graphische Darstellung der Menge M_a aus Aufgabenteil a mit ein. Achten Sie darauf, dass die Punkte beschriftet sind und dass die relative Lage der Punkte zu der Menge (d.h. liegt der Punkt innerhalb, außerhalb, auf dem Rand) klar erkennbar ist.

e) Ermitteln Sie (unter Zuhilfenahme der Zeichnung) die (einzige) Lösung z_e der Gleichung $z^3 = z_{c1}$ $(= -5)$ welche innerhalb der Menge M_a liegt

Zum Knobeln

Aufgabe 7. (Preisaufgabe WS 2005/2006)

Alice: Ich denke mir ein Polynom mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten. Kannst du es erraten?

Bob: Nein, dazu brauche ich weitere Angaben. Darf ich dich nach ein paar Funktionswerten fragen?

Alice: Ja natürlich. Wie viele hättest du denn gerne?

Bob: Nun, $n + 1$ wären nicht schlecht, wenn n der Grad deines Polynoms ist. Dann hätte ich $n + 1$ Gleichungen für die $n + 1$ Koeffizienten.

Alice: Das wäre mir viel zu aufwändig. Außerdem kennst du den Grad nicht, und ich werde ihn dir nicht verraten. Aber ich kann dir für zwei ganzzahlige Argumente, die du wählen kannst, jeweils den Wert des Polynoms angeben.

Kann Bob damit das Polynom von Alice bestimmen?