Aufgabe 1. Zunächst werden die (relativen) Maxima bestimmt:

$$f'(x) = 2x + 6x^2 - 8x^3 = 2x \cdot (1 + 3x - 4x^2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0, \qquad x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-8} \qquad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -\frac{1}{4}$$

$$f''(x) = 2 + 12x - 24x^2 \qquad \Rightarrow \qquad f''(0) = 2, \quad f''(1) = -10, \quad f''(-\frac{1}{4}) = -\frac{5}{2}$$

Relative Maxima gibt es also bei $x_2 = 1$ und $x_3 = -\frac{1}{4}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind $f(1) = 1$ und $f(-\frac{1}{4}) = -\frac{3}{8\cdot 16}$. Wegen

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

existiert das absolute Maximum. Es ist das größte der relativen Maxima, also ist

$$f(x) \leq f(1) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2.

Wir betrachten die Funktion für $a = 0$:

$$f_0(x) = x^3 + 3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad f_0'(x) = 3x^2 + 6x \qquad \Rightarrow \qquad f_0''(x) = 6x + 6$$

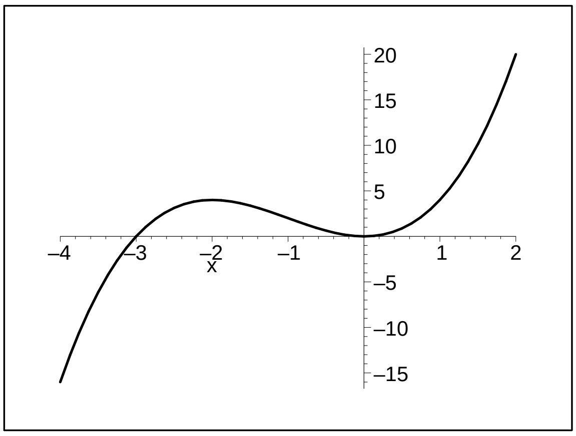
Wir bestimmen die Extremwerte dieser Funktion:

$$f_0'(x) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3x(x+2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0 \quad \vee \quad x = -2$$

$$f_0''(0) = 6 > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Minimum, } f_0(0) = 0$$

$$f_0''(-2) = -6 < 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Maximum, } f_0(-2) = 4$$

Hieraus ergibt sich der skizzierte Verlauf der Funktion $f_0(x) = x^3 + 3x^2$.



Die Funktion f_a ergibt sich hieraus durch Verschieben um a nach unten. f_a hat Nullstellen, wo f_0 den Wert a annimmt. Für die gesuchte Anzahl der Nullstellen gilt deshalb:

Werte von a	Anzahl Nullstellen
$a < 0$	1
$a = 0$	2
$0 < a < 4$	3
$a = 4$	2
$a > 4$	1

Aufgabe 3.
a) Durch Erraten findet man die Nullstelle $z_1 = 2$ und spaltet diese mit dem Horner-Schema ab:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \underline{\underline{0}} \end{array} \Rightarrow z^5 - 2z^4 + z - 2 = (z-2)(z^4+1)$$

Die restlichen Nullstellen erfüllen also die Gleichung $z^4 = -1$. Sie können durch komplexes Wurzelziehen ermittelt werden:

$$z^4 = -1 = e^{i\pi} \quad \Rightarrow$$

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\cdot 2\pi\right)}, \quad z_4 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{4}\cdot 2\pi\right)}, \quad z_5 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\cdot 2\pi\right)}$$

Umwandlung dieser Exponentialform in Standardform:

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(1+i)$$

$$z_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(-1+i)$$

$$z_4 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(-1-i)$$

$$z_5 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(1-i)$$

b) Durch die Substitution $w = z^3$ ergibt sich eine quadratische Gleichung, welche man direkt löst:

$$\frac{1}{4}z^6 + z^3 + 2 = \frac{1}{4}w^2 + w + 2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad w_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2}}{\frac{1}{2}} = -2 \pm 2i$$

Für beide Nullstellen in w wird nun die Rücksubstitution durchgeführt. Für $w_1 = -2+2i$ ergibt sich

$$z^3 = w_1 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}i\right)} = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$$

$$z_2 = z_1 \cdot e^{\frac{1}{3}(2\pi i)} = (1+i) \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = (1+i)\cdot\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) + \frac{i}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)$$
$$z_3 = z_1 \cdot e^{\frac{2}{3}(2\pi i)} = (1+i) \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = (1+i)\cdot\left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right) - \frac{i}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Für $w_2 = -2-2i = \overline{w}_1$ ergibt sich

$$z^3 = w_2 = \overline{w}_1$$
$$z_4 = \overline{z}_1 = 1-i$$
$$z_5 = \overline{z}_2 = -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) - \frac{i}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)$$
$$z_6 = \overline{z}_3 = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right) + \frac{i}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Aufgabe 4. Da das Polynom reelle Koeffizienten hat, ist mit der Zahl $z_1 = 1+i$ auch die konjugiert komplexe Zahl $z_2 = 1-i$ eine Nullstelle. Diese können mit dem Horner-Schema abgespalten werden. (Alternativ könnten beide Nullstellen gemeinsam mittels Polynomdivision abgespalten werden):

	1	-3	2	2	-4
1+i		1+i	-3-i	-2i	4
	1	-2+i	-1-i	2-2i	$\underline{\underline{0}}$
1-i		1-i	-1+i	-2+2i	
	1	-1	-2	$\underline{\underline{0}}$	

Das verbleibende reduzierte Polynom hat Grad 2. Seine Nullstellen können leicht bestimmt werden:

$$z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4 = (z-(1+i))\,(z-(1-i)) \cdot \left(z^2 - z - 2\right)$$
$$\Rightarrow \quad z_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Die restlichen Nullstellen - neben $(1+i)$ - sind also $(1-i)$, -1 und 2.

Aufgabe 5.

Man erkennt die Nullstelle $z_1 = 0$ und spaltet diese ab:

$$4z^3 + 12z^2 + 4z = 4z \cdot \left(z^2 + 3z + 1\right) \quad \Rightarrow \quad z_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Also:

$$4z^3 + 12z^2 + 4z = 4z \cdot \left(z + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot \left(z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) =$$
$$= z \cdot \left(2z + 3 - \sqrt{5}\right) \cdot \left(2z + 3 + \sqrt{5}\right)$$

Aufgabe 6.
a) Die Formel $3 \leq |z - 2i| \leq 5$ besagt, dass der Abstand des Punktes z vom Punkt $2i$ zwischen 3 und 5 liegt. (Dabei werden komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene einfach Punkte genannt.) Daher ist die Menge M_a ein Kreisring um den Punkt $2i$. Der Radius des inneren Kreises ist 3, der des äußeren 5. Die Randkurven gehören mit zur Menge hinzu.

► Graphische Darstellung siehe bei Teilaufgabe d.

b) Die Mitternachtsformel ergibt

$$z_{b1,b2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$$

► Die Gleichung hat also (genau) die beiden komplexen Lösungen $z_{b1} = -3 + 2i$ und $z_{b1} = -3 - 2i$.

Für die Quotienten ergibt sich

$$\frac{z_{b1}}{z_{b2}} = \frac{-3 + 2i}{-3 - 2i} = \frac{(-3 + 2i)^2}{(-3 - 2i)(-3 + 2i)} = \frac{9 - 12i - 4}{9 + 4} = \frac{1}{13}(5 - 12i)$$
$$\frac{z_{b2}}{z_{b1}} = \frac{-3 - 2i}{-3 + 2i} = \frac{(-3 - 2i)^2}{(-3 + 2i)(-3 - 2i)} = \frac{9 + 12i - 4}{9 + 4} = \frac{1}{13}(5 + 12i)$$

Da die beiden Zahlen z_{b1} und z_{b1} konjugiert komplex zueinander sind, haben sie den gleichen Betrag. Der Betrag der Quotienten ist aber gleich dem Quotienten der Beträge, also 1. (Natürlich ergibt sich das auch durch explizite Rechnung.)

► Die Quotienten sind $\frac{z_{b1}}{z_{b2}} = \frac{1}{13}(5 - 12i)$ und $\frac{z_{b2}}{z_{b1}} = \frac{1}{13}(5 + 12i)$. Es ist $\left|\frac{z_{b1}}{z_{b2}}\right| = 1$ und $\left|\frac{z_{b2}}{z_{b1}}\right| = 1$.

Hinweis: Man kann sich überlegen, dass - wegen $z_{b2} = \overline{z}_{b1}$ - auch die beiden Quotienten konjugiert komplex zueinander sind. Dann würde die Berechnung eines der Quotienten ausreichen.

c) Das Horner-Schema wird zunächst auf z_{c1} und anschließend auf z_{c2} angewandt:

	1	11	44	76	43	65	0
-5		-5	-30	-70	-30	-65	0
	1	6	14	6	13	0	$\underline{\underline{0}}$
i		i	-1+6i	-6+13i	-13	0	
	1	6+i	13+6i	13i	0	$\underline{\underline{0}}$	

Der doppelt unterstrichene Wert gibt den Funktionswert an der jeweiligen Stelle an.

Folglich sind z_{c1} und z_{c2} Nullstellen. Da die Koeffizienten des gegebenen Polynoms reell sind, muss mit z_{c2} aber auch der konjugiert komplexe Wert $z_{c3} = \overline{z}_{c2} = -i$ eine Nullstelle sein. Als weitere Nullstelle ist $z_{c4} = 0$ unmittelbar zu erkennen. Die Abspaltung geschieht wieder mit dem Horner-Schema:

	1	6+i	13+6i	13i	0
-i		-i	-6i	-13i	0
	1	6	13	0	$\underline{\underline{0}}$
0		0	0	0	
	1	6	13	$\underline{\underline{0}}$	

Die verbleibende Gleichung ist offenbar genau die quadratische Gleichung aus Aufgabenteil b, deren Lösungen wir schon kennen.

► Die Gleichung hat die sechs Lösungen $z_{c1} = -5$, $z_{c2} = i$, $z_{c3} = \overline{z}_{c2} = -i$, $z_{c4} = 0$, $z_{c5} = z_{b1} = -3 + 2i$, $z_{c6} = z_{b2} = -3 - 2i$.

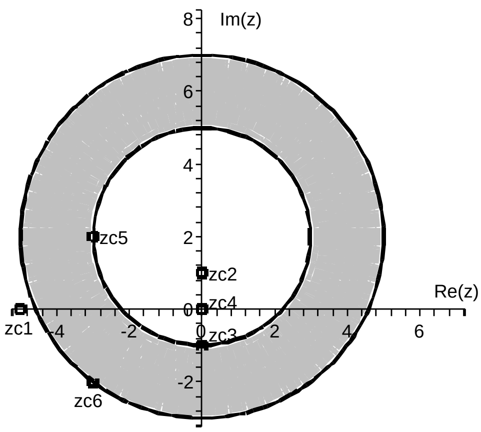
Hinweis: Natürlich hätte die "triviale" Nullstelle $z_{c4} = 0$ auch ohne Horner-Schema abgespalten werden können. Tut man dies, bevor die anderen Nullstellen abgespalten werden, so kann man sogar ein ganz klein wenig Rechnerei sparen.

d) Klar erkenntlich ist, dass z_{c1}, z_{c2} und z_{c4} nicht zur Menge M_a gehören und dass z_{c3} und z_{c5} auf dem (inneren) Rand der Menge liegen. Für z_{c6} ist eine kleine Hilfsrechnung notwendig:

$$|z_{c6} - 2i| = |(-3 - 2i) - 2i| = |-3 - 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Der Punkt liegt also auf dem (äußeren) Rand der Menge M_a.

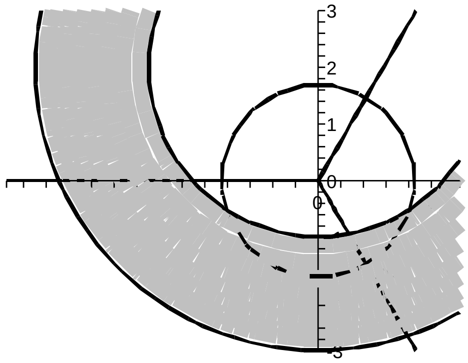
► Insgesamt ergibt sich folgendes Bild:



e) Für den Betrag von z_e gilt $|z_e| = \sqrt[3]{|-5|} = \sqrt[3]{5} \approx 1,71$. Das Argument von z_e ist ein Drittel des Argumentes von z_{c1} oder unterscheidet sich hiervon um ein Vielfaches von einem Drittel des Vollwinkels. Das Argument von z_{c1} ist π. Das Argument von z_e muss also $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ oder $\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ sein. In der Zeichnung erkennt man, dass der zugehörige Punkt nur im dritten Fall innerhalb der Menge M_a liegt. Daher ist

$$z_e = \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{5} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{5} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} \cdot \left(1 - i\sqrt{3}\right)$$

► Die Zahl z_e hat den Betrag $\sqrt[3]{5}$ und das Argument $\frac{5\pi}{3}$. (Es ist $z_e = \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} \cdot \left(1 - i\sqrt{3}\right)$).)



Aufgabe 7. Wenn Bob beide Argumente angeben muss, bevor er die Funktionswerte erhält, kann er das Polynom im allgemeinen nicht bestimmen.

Wenn er allerdings zunächst nur ein Argument angibt, den zugehörigen Funktionswert erhält und dann erst das zweite Argument wählen muss, kann er damit das Polynom folgendermaßen bestimmen:

Das Polynom sei durch

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

gegeben.
Zuerst fragt Bob nach

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Da alle Koeffizienten nichtnegativ sind, gilt dann $a_i \leq p(1)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.

Als zweites Argument wählt Bob eine Zahl der Form 10^k mit $10^k > p(1)$. Er erhält als Funtionswert

$$p(10^k) = a_0 + a_1 10^k + a_2 10^{2k} + \ldots + a_n 10^{n \cdot k}$$

Diese Zahl teilt Bob in Ziffernblöcke der Länge k und kann daraus direkt alle Koeffizienten ablesen.