

Thema: Grenzwerte

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x \cdot \cosh x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{1-x+\ln x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \cdot \ln x$
- f) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\frac{\sin 2x}{x-\pi}}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

Aufgabe 2. Berechnen Sie:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+n^2}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{2n-1} \right)^n$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (\sin x^4 + 2)}{x^3 + 1}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cosh x)^{x^{-2}}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$

Aufgabe 4. Berechnen Sie in Abhängigkeit des reellen Parameters a den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{a \cdot (x-1) + \ln x}$$

Aufgabe 5. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + (x^2)^n}$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich von f und stellen Sie $f(x)$ graphisch dar.

Hinweis: Berechnen Sie den Grenzwert in Abhängigkeit von x .

Zur Ergänzung

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist und dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 7. $\langle x_n \rangle$ sei eine konvergente Folge mit Grenzwert x . Zeigen Sie:

a) Auch die arithmetischen Mittel a_n konvergieren gegen x :

$$a_n := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow x$$

b) Sind alle Glieder x_n und der Grenzwert x positiv (> 0), dann konvergieren auch die geometrischen Mittel g_n gegen x :

$$g_n := \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \rightarrow x$$

Aufgabe 8. Ermitteln Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$$