Aufgabe 1.

Mit (?) über einem Gleichheitszeichen wird angezeigt, daß die Beziehung (nur) gilt, wenn der rechts stehende Ausdruck bestimmt ist. Führt eine Berechnung zum Erfolg, sind im Nachhinein alle so markierten Umformungen gerechtfertigt.

a) $$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sinh x}{x\cdot\cosh x}}_{\frac{0}{0}} \overset{(?)}{=} \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\cosh x}{\cosh x + x\cdot\sinh x}}_{\frac{1}{1}} = 1$$

b) $$\lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{x-1}{x^2+1}}_{\frac{0}{2}} = 0$$

c) $$\lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{\sin^2 \pi x}{1-x+\ln x}}_{\frac{0}{0}} \overset{(?)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2\cdot\sin\pi x\cdot\cosh\pi x\cdot\pi}{-1+\frac{1}{x}} \overset{(?)}{=} 2\pi\cdot\underbrace{\lim_{x\to 1}\cos\pi x}_{-1}\cdot\lim_{x\to 1}\underbrace{\frac{\sin\pi x}{-1+\dfrac{1}{x}}}_{\frac{0}{0}} \overset{(?)}{=}$$

$$-2\pi\cdot\lim_{x\to 1}\underbrace{\frac{\cos\pi x\cdot\pi}{-\dfrac{1}{x^2}}}_{\frac{-\pi}{-1}} = -2\pi^2$$

d) $$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\ln(1+e^x)}{x}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{(?)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+e^x}\cdot e^x}{1} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{e^x}{1+e^x}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{(?)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$$

e) $$\lim_{x\to 0+}\sqrt[3]{x}\cdot\ln x = \lim_{x\to 0+}\underbrace{\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{3}}}}_{\frac{-\infty}{+\infty}} \overset{(?)}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{4}{3}}} = -3\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x} =$$

$$-3\cdot\lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{3}} = 0$$

(Es genügt auch der direkte Verweis, dass $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$ für alle $\alpha > 0$.)

f) $$\lim_{x\to\pi}\sqrt{\frac{\sin 2x}{x-\pi}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Stetigkeit}\\ \text{der Wurzel}}}{\overset{(?)}{=}} \sqrt{\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{x-\pi}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'Hospital}\\ (\text{Form}\frac{0}{0})}}{\overset{(?)}{=}} \sqrt{\lim_{x\to\pi}\frac{2\cos 2x}{1}} = \sqrt{2}$$

g) $$\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)}_{\pm\infty-\pm\infty} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{e^x-1-x}{x\cdot(e^x-1)}}_{\frac{0}{0}} \overset{(?)}{=} \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{e^x-1}{(e^x-1)+xe^x}}_{\frac{0}{0}}$$

$$\overset{(?)}{=} \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x}}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = \lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot\ln 3} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ln 3} = e^0 = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot\ln(1+n^2)} \overset{(?)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2)} \overset{(?)}{=} \boxed{\begin{matrix}\text{Stetigkeit}\\ \text{der}\\ \text{e-Funktion}\end{matrix}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}}$

$\overset{(?)}{=} \boxed{\begin{matrix}\text{L'Hospital}\\ (\text{Form } \frac{\infty}{\infty})\end{matrix}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}} \overset{(?)}{=} \boxed{\begin{matrix}\text{L'Hospital}\\ (\text{Form } \frac{\infty}{\infty})\end{matrix}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2x}} = e^0 = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \overset{(?)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}}$

$\overset{(?)}{=} \boxed{\begin{matrix}\text{L'Hospital}\\ (\text{Form } \frac{0}{0})\end{matrix}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-2}{x^3}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = e^0 = 1$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\ln\frac{n+3}{2n-1}\right)} \overset{(?)}{=} e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} n\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+3}{2n-1}\right)} = e^{\infty\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+3}{2n-1}\right)}$

$\overset{(?)}{=} e^{\infty\cdot\left(\ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n-1}\right)} \overset{(?)}{=} e^{\infty\cdot\ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}} = e^{\infty\cdot(-\ln 2)} = e^{-\infty} = 0$

Aufgabe 3.

a) Durch die direkte Anwendung der Regel von de l'Hospital kann kein Fortschritt erzielt werden. Der Ausdruck muß in zwei Faktoren zerlegt werden:

$$\text{Es ist } \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{x}{x^3+1}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{(?)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^2} = 0 \text{ und } \left|\sin x^4 + 2\right| \le \left|\sin x^4\right| + 2 \le 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(\sin x^4+2\right)}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{x}{x^3+1}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\left(\sin x^4+2\right)}_{\text{beschränkt}} = 0$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{(\cosh x)^{x^{-2}}}_{1^\infty} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln\cosh x} \overset{(?)}{=} \boxed{\begin{matrix}\text{Stetigkeit}\\ \text{der}\\ \text{e-Funktion}\end{matrix}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cosh x}{x^2}} \overset{(?)}{=} \boxed{\begin{matrix}\text{L'Hospital}\\ (\text{Form } \frac{0}{0})\end{matrix}} =$

$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cosh x}\cdot\sinh x}{2x}} \overset{(?)}{=} \boxed{\begin{matrix}\text{Faktorweiser}\\ \text{Grenzüber-}\\ \text{gang}\end{matrix}} = e^{\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cosh x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}} \overset{(?)}{=} \boxed{\begin{matrix}\text{L'Hospital}\\ (\text{Form } \frac{0}{0})\end{matrix}} =$

$e^{\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cosh x}{1}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}}_{\frac{\pm\infty}{\infty}} \overset{(?)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{-2}{x^3}\cdot e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}}}_{\frac{0}{\infty}} = 0$$

Hinweis: Nicht zum Ziel führt der Versuch

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}}_{\frac{0}{0}} \overset{(?)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}}{1} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}}_{\frac{0}{0}} = \;?$$

da die Potenz im Nenner bei weiterem Anwenden der Regel immer mehr zunimmt.

Aufgabe 4.
Der Grenzwert wird zunächst mit Hilfe der Regel von de l'Hospital vereinfacht:

$$g := \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{a\cdot(x-1)+\ln x} \overset{(?)}{=} \boxed{\text{Form }\tfrac{0}{0}} = \lim_{x\to 1}\frac{2\,(x-1)}{a+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{2x\,(x-1)}{ax+1}$$

$$\overset{(?)}{=} 2\cdot\left(\lim_{x\to 1}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{ax+1}\right) = 2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{ax+1}$$

Nun müssen zwei Fälle unterschieden werden:

- Für $a\neq -1$ ist $g = 2\cdot\frac{0}{a+1} = 0$
- Für $a = -1$ ist $g = 2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{-x+1} = 2\cdot\lim_{x\to 1}(-1) = -2$

Aufgabe 5.
Zunächst muss man erkennen (siehe Behandlung der Exponentialfunktionen oder der Potenzfunktionen), dass die Potenz im Nenner ihr qualitatives Verhalten bei x betragsmäßig 1 ändert. Es ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(x^2\right)^n = \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ 1 & |x|=1 \\ \infty & |x|>1 \end{cases}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+(x^2)^n} \overset{(?)}{=} \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}(x^2)^n} = \begin{cases} 1 & |x|<1 \\ \frac{1}{2} & |x|=1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

Da der Grenzwert für alle x existiert, ist der Definitionsbereich die ganze reelle Achse.

Aufgabe 6.
Die Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen ist wieder differenzierbar. Klar ist deshalb, dass $f(x)$ für $x\neq 0$ beliebig oft differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

ist von der Bauart $\frac{a}{x^k} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^k} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{-k \cdot a}{x^{k+1}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{a}{x^k} \cdot \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{a_1}{x^{k+1}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{a_2}{x^{k+3}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

sind alle Ableitungen $f^{(n)}(x)$ Linearkombinationen der Basisfunktionen

$$b_k(x) := \frac{1}{x^k} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

All dies natürlich für $x \neq 0$. Wir zeigen jetzt - mit vollständiger Induktion, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ ist dies nach Definition von $f(x)$ richtig. Ist $f^{(n)}(0) = 0$, dann ergibt sich für die nächst höhere Ableitung:

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x}$$

Unter dem letzten Grenzwert steht wieder eine Linearkombination unserer Basisfunktionen. Es genügt also zu zeigen, dass alle Basisfunktionen für $x \to 0$ gegen 0 gehen:

$$\lim_{x\to 0} b_k(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^k}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

$$\overset{(?)}{=} \boxed{\begin{array}{l}\text{L'Hospital} \\ \text{(Form } \frac{\pm\infty}{\infty}\text{)}\end{array}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-k}{x^{k+1}}}{\frac{-2}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{k}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^{k-2}}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

Im Falle $k \leq 2$ kann dieser Grenzwert direkt angegeben werden:

$$\lim_{x\to 0} b_k(x) = \frac{k}{2} \cdot \lim_{x\to 0} x^{2-k} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{0} = 0$$

Für $k > 2$ führt wiederholte Anwendung schließlich auch zum Ziel.

Aufgabe 7.

a) Es sei $\epsilon > 0$. Wegen $x_n \to x$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass die Abweichung $|x_n - x|$ für alle $n > n_1$ kleiner als $\epsilon/2$ ist. Für diese n gilt

$$\begin{aligned}
|a_n - x| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - x\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - x| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1}|x_i - x| + \frac{1}{n}\sum_{i=n_1+1}^{n}|x_i - x| < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1}|x_i - x| + \frac{n - n_1}{n} \cdot \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1}|x_i - x|}_{s:=} + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Die Zahl s ist ein fester Wert. Das heißt, er hängt nur von dem gewählten Wert n_1, nicht aber von n ab. Wählt man nun $n_2 \in \mathbb{N}$ größer als $\frac{2s}{\epsilon}$, dann gilt für alle $n > \max(n_1, n_2)$

$$|a_n - x| < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1}|x_i - x| + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

b) Wegen $x_n > 0$ und $x > 0$ kann $y_n := \ln x_n$ und $y := \ln x$ gebildet werden. Aufgrund der Stetigkeit der ln-Funktion konvergiert die Folge $< y_n >$ gegen y. Nach der vorigen Teilaufgabe ist demnach auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = y$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} &= \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n} \\ = \frac{\ln(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)}{n} &= \ln \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \ln g_n \end{aligned}$$

$\ln g_n$ konvergiert also gegen $y = \ln x$. Aus der Stetigkeit der e-Funktion folgt $g_n \to x$.

Aufgabe 8.
Bekanntlich ist

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Die geometrischen Mittel der rechts stehenden Folge sind

$$g_n := \sqrt[n]{\left(\frac{2}{1}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot n^{n-1} \cdot (n+1)^n}{1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot (n-1)^{n-1} \cdot n^n}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$$

Sie konvergieren (nach der vorigen Aufgabe) ebenfalls gegen e. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \sqrt[n]{n!} \overset{(?)}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} g_n} = \frac{1}{e}$$