Aufgabe 1. Es ist

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 26x + 14$$

$$f'(0) = 14 \quad , \qquad f'(1) = 4 - 6 - 26 + 14 = -14$$

$$g(x) = \begin{cases} 10 - (14x - 2) & \text{wenn } 14x - 2 \geq 0 \\ 10 + (14x - 2) & \text{wenn } 14x - 2 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 12 - 14x & \text{für } x \geq \frac{1}{7} \\ 8 + 14x & \text{für } x \leq \frac{1}{7} \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -14 & \text{für } x > \frac{1}{7} \\ 14 & \text{für } x < \frac{1}{7} \end{cases}$$

$$g'(0) = 14 \quad , \qquad g'(1) = -14$$

Die Funktion f' ist stetig. Wegen $f'(0) > 0$ und $f'(1) < 0$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in (0,1)$ mit $f'(\xi) = 0$, also eine waagrechte Tangente. Auf g ist der Zwischenwertsatz nicht anwendbar, weil g' an der Stelle $\frac{1}{7} \in (0,1)$ nicht stetig ist.

Aufgabe 2.

a) Zunächst werden die Ableitungen (bis zur vierten) an der Stelle 0 (Entwicklungspunkt) berechnet:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} \qquad f'(0) = -2$$

$$f''(x) = \frac{4}{(1+x)^3} \qquad f''(0) = 4$$

$$f'''(x) = \frac{-12}{(1+x)^4} \qquad f'''(0) = -12$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{48}{(1+x)^5} \qquad f^{(4)}(0) = 48$$

Daher ergibt sich für das vierte Taylor-Polynom von f an der Stelle 0:

$$p_4(x) = \sum_{i=0}^{4} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i =$$

$$\frac{f^{(0)}(0)}{0!} \cdot x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot x^4$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{-2}{1}x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{-12}{6}x^3 + \frac{48}{24}x^4 = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4$$

b) Zunächst werden wieder die Ableitungen an der Stelle 0 berechnet:

$f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$	$f'(0) = -2$
$f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = \frac{-2}{(1-x)^3} - \frac{2}{(1+x)^3}$	$f'''(0) = -4$
$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1-x)^4} + \frac{6}{(1+x)^4}$	$f^{(4)}(0) = 0$

Daher ergibt sich für das vierte Taylor-Polynom von f an der Stelle 0:

$$p_4(x) = \sum_{i=0}^{4} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i =$$

$$\frac{f^{(0)}(0)}{0!} \cdot x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot x^4$$

$$= \frac{0}{1} + \frac{-2}{1}x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-4}{6}x^3 + \frac{0}{24}x^4 = -2x - \frac{2}{3}x^3$$

Aufgabe 3. Für einen beliebigen Entwicklungsmittelpunkt a ist das dritte Taylor-Polynom

$$p_3(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \tfrac{1}{2} f''(a) \cdot (x-a)^2 + \tfrac{1}{6} f'''(a) \cdot (x-a)^3$$

Für den Funktionswert und die Ableitungen an den Stellen -1, 0 und 1 erhält man:

x	-1	0	1
$f(x) = x^3$	-1	0	1
$f'(x) = 3x^2$	3	0	3
$f''(x) = 6x$	-6	0	6
$f'''(x) = 6$	6	6	6
$f^{(4)}(x) = 0$	0	0	0

a) $$p_3(x) = f(-1) + f'(-1) \cdot (x+1) + \frac{1}{2} f''(-1) \cdot (x+1)^2 + \frac{1}{6} f'''(-1) \cdot (x+1)^3$$
$$= -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$$

b) $$p_3(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{6} f'''(0) \cdot x^3 = x^3$$

c) $$p_3(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x-1) + \frac{1}{2} f''(1) \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{6} f'''(1) \cdot (x-1)^3$$
$$= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

Da die vierte Ableitung von f (überall) verschwindet, gilt für das zugehörige Restglied unabhängig vom Entwicklungspunkt a

$$R_3 = \tfrac{1}{24} f^{(4)}(\xi) \cdot (x-a)^4 = 0$$

Das heißt, dass f(x) mit dem dritten Taylor-Polynom übereinstimmt und zwar für jeden Entwicklungs-Mittelpunkt a. (Bei der Entwicklung um 0 ist dies unmittelbar einsichtig.) Dies gibt uns eine weitere Möglichkeit, das Taylor-Polynom zu berechnen. Wir wenden den binomischen Lehrsatz an:

$$p_3(x) = f(x) = x^3 = (a + (x-a))^3 = a^3 + 3a^2(x-a) + 3a(x-a)^2 + (x-a)^3$$

Aufgabe 4.
a) Die Logarithmus-Funktion $\ln x$ ist definiert für $x > 0$. Die Funktion $f(x)$ ist deshalb definiert für $x + 1 > 0$. Der Definitionsbereich von f ist daher

$$D(f) \ = \ (-1, \infty)$$

b) Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^2 \cdot 0!}{(x+1)^1}$$

Für $n = 1$ ist die Behauptung also erfüllt. Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist für $m = n + 1$

$$f^{(m)} = \left(f^{(n)}\right)' = \left(\frac{(-1)^{(n+1)} \cdot (n-1)!}{(x+1)^n}\right)' =$$

$$= -n \cdot \frac{(-1)^{(n+1)} \cdot (n-1)!}{(x+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{(n+2)} \cdot n!}{(x+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{(m+1)} \cdot (m-1)!}{(x+1)^m}$$

Die Behauptung gilt also auch für $m = n + 1$.

c) Für die Ableitungen im Entwicklungspunkt $a = 0$ ergibt sich ($n \in \mathbb{N}$)

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{(n+1)} \cdot (n-1)! \quad \text{und} \quad f^{(0)}(0) = f(0) = 0$$

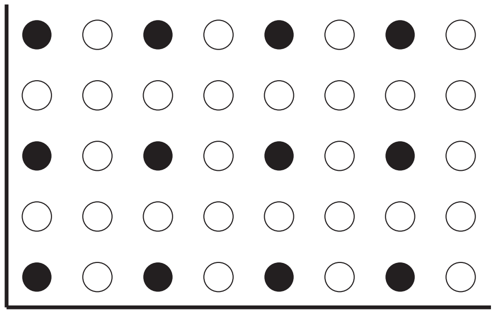
Das n-te Taylorpolynom $p_n(x)$ ist demnach

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{(i+1)} \cdot (i-1)!}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{(i+1)}}{i} \cdot x^i$$

Aufgabe 5. Der Springer kann die Aufgabe nicht lösen. Entscheidend dabei ist, dass das durch ihn besetzte Feld bei jedem Zug die Farbe wechselt. (Diese Eigenschaft des Springers ist auch beim Schachspielen von enormer Bedeutung.)

Um jedes Feld des Brettes genau einmal zu betreten, muss der Springer genau 63 Züge machen. Da 63 ungerade ist, müssen Ausgangsfeld und Zielfeld also unterschiedliche Farbe besitzen. Weil die Felder $a1$ und $h8$ aber die gleiche Farbe besitzen, kann ein Springer nicht in 63 Zügen von $a1$ nach $h8$ gelangen.

Aufgabe 6. Bei manchen See-Formen, etwa bei Rechtecken der Höhe 1, ist es unmittelbar einsichtig, dass die Aufgabe nicht lösbar ist. Tatsächlich geht der Austausch eines 4×1-Steines gegen einen 2×2-Stein aber in gar keiner Konstellation. Und das zu beweisen ist richtig schwer.



Die Färbungsmethode ist auch hier die ideale Technik. Gefärbt werden dabei die Noppen der Grundplatte. Allerdings ist es noch schwer genug, die richtige Färbung zu finden. In nebenstehendem Bild ist die Erfolg bringende Einfärbung der Noppen dargestellt. Im Vergleich zum Schachbrett-Muster ist hier jede zweite Reihe und Linie ganz weiß.

Ein Stein der Größe 2×2 bedeckt, egal wo er auf der Platte angebracht wird, stets genau eine schwarze Noppe. Ein Stein der Größe 4×1 bedeckt hingegen entweder gar keine oder aber genau zwei schwarze Noppen.

Bedeckt der See insgesamt eine gerade Anzahl von schwarzen Noppen, dann ist eine gerade Anzahl von 2×2-Steinen erforderlich, ansonsten eine ungerade Anzahl. Ein einzelner Stein eines Typs kann also niemals gegen einen des anderen Typs ausgetauscht werden.

Hinweis: Die Aufgabe wurde in anderem Gewand, dem Auslegen von Platten in einem Zimmer, in der zweiten Wettbewerbsrunde des Bundeswettbewerbs Mathematik 1973 gestellt.