

Thema: Vollständige Induktion

Zeigen Sie: Für die n -te Ableitung der Funktion $f(x) = x e^{2x}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1}(n + 2x) e^{2x}$$

Aufgabe 1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion die Aussagen a) und b):

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $q \neq 1$ gilt

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

b) Die Zahl $5^n - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar.

c) Versuchen Sie nun, die beiden Aussagen ohne vollständige Induktion herzuleiten.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie, für welche $n \in \mathbb{N}$ die nachstehenden Ungleichungen gelten und beweisen Sie Ihr Ergebnis mit vollständiger Induktion.

a) $n! > 2^n$

b) $n! > 10^n$

Aufgabe 3.

a) Bestimmen Sie die vier Parameter a bis d so, dass die Beziehung

$$\sum_{k=1}^n k^2 = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

für vier Werte von n richtig ist.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die entstandene Summenformel für alle $n \in \mathbb{N}$ Gültigkeit besitzt.

c) Suchen Sie - insbesondere im Internet und in der Bibliothek - nach diesen und anderen Herleitungen und Beweisen für die Summenformel.

Prüfungen und Tests

Aufgabe 4. Prüfung im Wintersemester 2007/2008 (12 Punkte)

Zum Knobeln

Aufgabe 5. Alexander lebt in Stuttgart nahe einer S-Bahn-Haltestelle. Er hat zwei Freundinnen, Larissa in Nufringen und Katrin in Nellmersbach. Zu beiden Orten hat er direkte Verbindungen, nach Nufringen mit der S1 Richtung Herrenberg, nach Nellmersbach mit der S3 Richtung Backnang.

Da er sich nicht zwischen den zwei Mädchen entscheiden kann, will er das Schicksal entscheiden lassen, welches der Mädchen er am Wochenende jeweils besucht. Er geht einfach zu einem willkürlichen Zeitpunkt zur S-Bahn und nimmt die nächste der beiden Bahnen, die kommt. Obwohl beide im gleichen Takt, nämlich alle 30 Minuten fahren, stellt er verblüfft fest, dass er ungefähr doppelt so oft bei Larissa landet.

Aber Katrin ist clever. Nach Sichtung der Fahrpläne überredet sie Alexander, schon am frühen Freitag Abend zu fahren. Dann verkehren auf beiden Strecken zusätzliche Verstärkerzüge im 15-Minuten-Takt. Alexander muss also nicht so lange warten und kann zudem längere Zeit mit seiner jeweils Angebeteten verbringen. Und das ist jetzt doppelt so oft Katrin wie Larissa.

Können Sie sich einen guten Grund vorstellen für diese Kapriolen des Schicksals? Einen S-Bahn-Fahrplan brauchen Sie hierzu nicht, wohl aber für die folgende Frage: Bei welcher S-Bahn-Station könnte Alexander wohnen?