Aufgabe 1.
a) **Induktionsanfang:** Für $n = 0$ ist die Behauptung erfüllt. Für alle $q \neq 1$ gilt:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{0} q^k = 1 \quad = \quad \frac{1-q^1}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Induktionsschritt: Die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Dann gilt für $m = n + 1$:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^m = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1} =$$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$$

b) **Induktionsanfang:** Für $n = 1$ ist die Behauptung erfüllt. Zahl $5^1 - 1 = 4$ ist nämlich offenkundig durch 4 teilbar.

Induktionsschritt: Die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig. $a_n := 5^n - 1$ sei also durch 4 teilbar. Es ist folglich $a_n = 4 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Dann gilt für $m = n + 1$:

$$a_m = a_{n+1} = 5^{n+1} - 1 = 5 \cdot 5^n - 1 = 5 \cdot (a_n + 1) - 1 =$$

$$= 5 \cdot (4k + 1) - 1 = 5 \cdot 4k + 5 - 1 = 4 \cdot (5k + 1)$$

Auch a_m ist also durch 4 teilbar.

c) Auch ein **direkter Beweis** der beiden Aussagen ist leicht möglich. Es ist nämlich

$$\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) \cdot (1-q) = 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + - \ldots - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

Division durch $1 - q \neq 0$ liefert die Formel aus Behauptung a):

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n \ = \ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Setzt man hierin $q = 5$ und ersetzt n durch $n - 1$, so ergibt sich

$$1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{n-1} = \frac{1-5^n}{1-5} = \frac{5^n - 1}{4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Links steht offenbar eine ganze Zahl. Folglich muss $5^n - 1$ stets durch 4 teilbar sein.

Aufgabe 2.
a) Es ist

$$< n! >= 1\ ,\ 2\ ,\ 6\ ,\ 24\ ,\ 120\ , \ldots$$

$$< 2^n >= 1\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 16\ , \ldots$$

Die Vermutung ist, dass für $n \geq 4$ die Ungleichung $n! > 2^n$ stets erfüllt ist.

Induktionsanfang: Für $n = 4$ ist tatsächlich $n! - 2^n = 24 - 8 > 0$.

Induktionsschritt: Die Behauptung sei für ein $n \geq 4$ richtig:

$$n! \quad > \quad 2^n$$

Dann gilt für $m = n + 1$:

$$m! = (n+1)! = n! \cdot (n+1) \quad > \quad 2^n \cdot (n+1) > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1} = 2^m$$

Genau für $n \geq 4$ gilt also $n! > 2^n$.

b) Mit Maple lässt sich nachweisen, dass für $n = 25$ erstmals $n! > 10^n$ ist. Die Vermutung ist, dass die Ungleichung für größere n erst recht gilt.

Induktionsanfang: Für $n = 25$ ist die Behauptung nach Maple erfüllt.

Induktionsschritt: Die Behauptung sei für ein $n \geq 25$ richtig:

$$n! \quad > \quad 10^n$$

Dann gilt für $m = n + 1$:

$$m! = (n+1)! = n! \cdot (n+1) \quad > \quad 10^n \cdot (n+1) > 10^n \cdot 10 = 10^{n+1} = 10^m$$

Genau für $n \geq 25$ gilt also $n! > 10^n$.

Aufgabe 3.
a) Wir setzen

$$s(n) := \sum_{k=1}^{n} k^2 = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

Setzt man nacheinander $n = 1$ bis 4 in die Beziehung ein, so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c + d$$

$$1 + 4 = 8 \cdot a + 4 \cdot b + 2 \cdot c + d$$

$$1 + 4 + 9 = 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d$$

$$1 + 4 + 9 + 16 = 64 \cdot a + 16 \cdot b + 4 \cdot c + d$$

Löst man dieses Gleichungssystem, zum Beispiel mit Maple, dann erhält man

$$a = \frac{1}{3}\ , \quad b = \frac{1}{2}\ , \quad c = \frac{1}{6}\ , \quad d = 0$$

Mit etwas Überlegung kann man das Gleichungssystem aber deutlich einfacher halten. Zunächst erkennt man, dass die Summe auf der linken Seite genauso gut ab 0 laufen könnte, da der Summand für $k = 0$ keinen Beitrag liefert:

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

Dies lässt erwarten, dass die Summenformel auch für $n = 0$ gilt. Dies führt zur Bedingung

$$0 = 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d$$

also $d = 0$. Die Beziehung lautet dann

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n = n \cdot (a \cdot n^2 + b \cdot n + c)$$

Es müssen dann nur noch drei Parameter bestimmt werden. Dazu können die ersten drei der obigen Gleichungen (mit $d = 0$) verwendet werden:

$$1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c$$

$$1 + 4 = 8 \cdot a + 4 \cdot b + 2 \cdot c$$

$$1 + 4 + 9 = 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c$$

Noch immer aber wird man die Arbeit des Lösens gerne Maple überlassen. Mit etwas Intuition ist eine weitere, entscheidende Vereinfachung möglich. Man könnte vermuten, dass die Beziehung

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = n \cdot (a \cdot n^2 + b \cdot n + c) =: p(n)$$

auch für $n = -1$ richtig ist. Die Summe ist dann definitionsgemäß 0. -1 ist demnach eine Nullstelle des Polynoms $p(n)$. Das Polynom lässt sich deshalb schreiben als

$$p(n) = n \cdot (n + 1) \cdot (A \cdot n + B)$$

Unsere Beziehung wird zu

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = n \cdot (n + 1) \cdot (A \cdot n + B) = p(n)$$

Es verbleiben nur noch zwei (neue) Parameter, welche durch Einsetzen zweier Werte bestimmbar sind. Wir wählen $n = 1$ und $n = 2$:

$$1 = 1 \cdot 2 \cdot (A + B)$$

$$1 + 4 = 2 \cdot 3 \cdot (2A + B)$$

Diese Gleichungen sind jetzt recht einfach:

$$\frac{1}{2} = A + B$$

$$\frac{5}{6} = 2A + B$$

Durch Subtraktion der ersten von der zweiten ergibt sich $A = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Wir vermuten also, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ (und sogar noch für $n = 0$ und $n = -1$)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = n \cdot (n+1) \cdot (\frac{1}{3} \cdot n + \frac{1}{6}) = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Beachten Sie, dass die Vermutungen, so kühn sie auch anmuten mögen, völlig unkritisch sind. Die erhaltene Beziehung wird ja im nächsten Abschnitt nachgewiesen.

b) **Induktionsanfang:** Für $n = 0$ ist die Aussage richtig:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 0 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

(Wir wählen 0 als Anfang, weil dies einfacher zu prüfen ist, als $n = 1$.)

Induktionsschritt: Die Summenformel sei für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig. Für $m = n + 1$ ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + m^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + m^2 =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (m-1) \cdot m \cdot (2m-1) + m^2 = \frac{1}{6} \cdot m \cdot [(m-1) \cdot (2m-1) + 6 \cdot m] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot m \cdot \left[2m^2 - m - 2m + 1 + 6m\right] = \frac{1}{6} \cdot m \cdot \left[2m^2 + 3m + 1\right] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot m \cdot (m+1) \cdot (2m+1)$$

c) Es gibt zahlreiche Möglichkeiten mit wiederum vielfältigen Varianten. Die meisten davon sind prinzipiell für Summen von beliebigen Potenzen übertragbar. Man findet die Beschreibungen deshalb oft beim einfachsten Fall der Summe $\sum k$.

c1) Eine interessante Möglichkeit ist die vollständige Induktion direkt mit dem angegebenen Ansatz ohne vorherige Bestimmung der Konstanten a bis d. (Ich habe diese Möglichkeit aber noch nirgends gefunden.) Die Behauptung ist dann: Mit geeigneten Konstanten a bis d gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

Die Konstanten ergeben sich dann bei der Induktion automatisch.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d$$

Dies ist richtig (genau) für $d = 0$.

Induktionsschritt: Für ein n gelte mit geeigneten Konstanten

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

Dann ist für $m = n + 1$

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + m^2 = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d + m^2 =$$

$$= a \cdot (m-1)^3 + b \cdot (m-1)^2 + c \cdot (m-1) + d + m^2 =$$

$$= a \cdot (m^3 - 3m^2 + 3m - 1) + b \cdot (m^2 - 2m + 1) + c \cdot (m-1) + d + m^2 =$$

$$= \left[a \cdot m^3 + b \cdot m^2 + c \cdot m + d\right] + m^2 \cdot (-3a + 1) + m \cdot (3a - 2b) + (-a + b - c)$$

Damit der Induktionsschluss immer funktioniert, muss für alle m gelten

$$m^2 \cdot (-3a + 1) + m \cdot (3a - 2b) + (-a + b - c) = 0$$

Dazu müssen alle Koeffizienten 0 sein. Der Koeffizient von m^2 ist 0 für $a = \frac{1}{3}$, der Koeffizient von m für $b = \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}$, das konstante Glied verschwindet für $c = -a + b = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Damit ist bewiesen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

c2) Ein bekannter und eleganter Trick zur Herleitung ist die Berechnung von $\sum (k+1)^3$:

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} \left[k^3 + 3k^2 + 3k + 1\right] = \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

Nun ist (mit der Index-Transformation $i = k + 1$):

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 = \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3$$

Weiter sei die Formel für $\sum k$ bekannt:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

Setzt man beides oben ein, so ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)$$

Dies kann nach der gesuchten Summe aufgelöst werden:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3} \cdot \left[(n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)\right] = \frac{1}{3} \cdot (n+1)\left[(n+1)^2 - -\frac{3}{2}n - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (n+1) \left[(n^2 + \frac{1}{2}n\right] = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Der Nachteil dieser Herleitung ist, dass die Formeln für niedrigere Potenzen bereits bekannt sein müssen. Bei der Summe über k^2 ist dies noch nicht schlimm. Will man aber etwa die Formel für $\sum k^5$ ermitteln, dann müssen die Summen über k, k^2, k^3 und k^4 bereits bekannt sein oder extra zuvor berechnet werden.

c3) Für die Summe der Quadratzahlen gibt es auch auch einen wunderschönen geometrischen Trick nach dem Vorbild des kleinen Gauß. Diesen findet man etwa mit Google durch die Suchworte „summe“ und „quadrate“.

Aufgabe 4.
a) Lösung mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang:
$n = 0$: $2^{-1} \cdot 2x\, e^{2x} = x\, e^{2x} = f(x)$
oder
$n = 1$: $f'(x) = e^{2x} + x \cdot 2\, e^{2x} = 2^0 \cdot (1 + 2x)\, e^{2x}$

Induktionsschritt:
Aus $f^{(n)}(x) = 2^{n-1}(n + 2x)\, e^{2x}$ ergibt sich durch Ableiten

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) \;=\; \left(f^{(n)}\right)'(x) &= 2^{n-1} \cdot \left[2\, e^{2x} + (n+2x) \cdot 2\, e^{2x}\right] \\ &= 2^{n-1} \cdot [2 + 2n + 4x]\, e^{2x} \\ &= 2^n \cdot [(n+1) + 2x]\, e^{2x} \end{aligned}$$

b) Lösung mit Leibniz-Formel:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x\, e^{2x}\right) = x \cdot \frac{d^n}{dx^n}\, e^{2x} + \binom{n}{1} 1 \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\, e^{2x} = x \cdot 2^n\, e^{2x} + n \cdot 2^{n-1}\, e^{2x} =$$

$$= 2^{n-1} \cdot (n + 2x) e^{2x}$$

Aufgabe 5. Die Wahrscheinlichkeit hängt von den Zeit-Intervallen zwischen zwei Zügen ab. Wenn die eine Linie beispielsweise immer 00 und 30 fahren würde, die andere 01 und 31, dann würde Alexander nur wenn er zwischen 00 und 01 oder 30 und 31 kommt, die zweite Linie nehmen.

Da Alexander doppelt so oft die S1 nimmt als die S3, müssen sich die Zeit-Intervalle wie 2:1 verhalten. Beim 30-Minuten-Takt ergeben sich Intervalle von 20 und 10 Minuten. Wenn die S1 jeweils a Minuten und $a + 30$ Minuten nach einer vollen Stunde ($a < 30$) verkehrt, dann fährt die S3 jeweils $a+10$ und $a+40$ (mod 60) Minuten nach einer vollen Stunde. Zwischen der Abfahrt einer S1 und einer S3 liegen stets 10 Minuten, zwischen einer S3 und einer S1 aber stets 20 Minuten.

Durch die zusätzlichen Verstärkerzüge fährt die S1 (Modulo 60) zu den Zeitpunkten a,

$a+15$, $a+30$, $a+45$, die S3 zu den Zeitpunkten $a+10$, $a+25$, $a+40$, $a+55$. Zwischen der Abfahrt einer S1 und einer S3 liegen nach wie vor je 10 Minuten. Zwischen einer S3 und einer S1 sind es jetzt aber nur noch jeweils 5 Minuten. Deshalb erwischt Alexander jetzt doppelt so oft eine S3 wie eine S1.

Um herauszufinden, wo Alexander wohnt, muss im Fahrplan nach einem Bahnhof mit den angegebenen Verhältnissen gesucht werden. Es gibt genau zwei solche Bahnhöfe: Vaihingen und Hauptbahnhof. Zwischen ihnen liegen 15 Minuten Fahrtzeit. In Vaihingen ist $a = 20$, beim Hauptbahnhof ist $a = 5$ (Stand: Oktober 2008).