Aufgabe 1.

a) $3e^{i\frac{5\pi}{6}} = 3 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3 \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i$

b) $-5 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = -5 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -5 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 5i$

c) $7e^{i\pi} = 7 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = 7 \cdot (-1 + 0i) = -7$

Aufgabe 2.

a) $-1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$

b) $-1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

c) $z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \ \arg z = \arctan\frac{4}{3} \Rightarrow$

$z = 5 \cdot e^{i\arctan\frac{4}{3}} \approx 5 \cdot e^{0.93i}$

d) $z = -3 - 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \ \arg z = \pi + \arctan\frac{4}{3} \Rightarrow$

$z = 5 \cdot e^{i\left(\pi + \arctan\frac{4}{3}\right)} \approx 5 \cdot e^{4.07i}$

Zu beachten ist, dass der Realteil von z negativ ist. Daher muss die modifizierte Formel für das Argument verwendet werden.

e) $2i = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

f) $2 = 2 \cdot e^{0\cdot i}$

Aufgabe 3.

a) $i + \frac{1}{1+i} = i + \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = i + \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} \cdot (1+i) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow \left(i + \frac{1}{1+i}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^6 \cdot e^{6i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\frac{i}{8}$

b) $\left(i + \frac{1}{1+i}\right)^{18} = \left(\left(i + \frac{1}{1+i}\right)^6\right)^3 = \left(-\frac{i}{8}\right)^3 = -\frac{i^3}{8^3} = \frac{i}{512}$

c) $(1+i) \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}}$

$\Rightarrow \left((1+i) \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^9 = \left(\sqrt{2}\right)^9 \cdot e^{9i\frac{\pi}{12}} = 16\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 16 \cdot (-1 + i)$

Aufgabe 4. Die Aufgaben stammen aus dem Buch *Mathematische Olympiadeaufgaben aus der UdSSR* von Arthur Engel, erschienen im Ernst Klett Verlag Stuttgart (1972).
a) Die Grundidee ist, dass Potenzen von $a + b\sqrt{2}$ wieder von dieser Bauart sind.

$$(a + b\sqrt{2})^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b\sqrt{2} + 3 \cdot a \cdot b^2 2 + b^3 2\sqrt{2}$$

$$= (a^3 + 6ab^2) + (3a^2b + 2b^3)\sqrt{2} = a \cdot (a^2 + 6b^2) + b \cdot (3a^2 + 2b^2)\sqrt{2}$$

Findet man nun Zahlen a und b so, dass dieser letzte Ausdruck zu $20 + 14\sqrt{2}$ wird, dann ist

$$\sqrt[3]{20 \pm 14\sqrt{2}} = a \pm b\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 2a$$

Man kann vermuten, dass a und b ganzzahlig sind. Durch Ausprobieren findet man dann leicht $a = 2$ und $b = 1$, also

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$$

b) Nun müssen a und b so bestimmt werden, dass $7 + 5\sqrt{2}$ entsteht. Dies ist für $a = b = 1$ der Fall. Damit ergibt sich

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = (1 + \sqrt{2}) - (-1 + \sqrt{2}) = 2$$

c) Durch geschickte Anwendung der Rechenregeln für Logarithmen ergibt sich

$$\lg 5 \cdot \lg 20 + \lg^2 2 = \lg 5 \cdot (\lg 5 + \lg 4) + \lg^2 2 = \lg 5 \cdot (\lg 5 + 2\lg 2) + \lg^2 2$$

$$= \lg^2 5 + 2\lg 5 \lg 2 + \lg^2 2 = (\lg 5 + \lg 2)^2 = (\lg 10)^2 = 1^2 = 1$$

Aufgabe 5. Im Weblog finden Sie jetzt beim Test auch eine Version mit Angabe der Ergebnisse.

Aufgabe 6.
a) Die komplexe Zahl $z_a = \sqrt{3} - i$ hat den Realteil $Re(z_a) = \sqrt{3}$ und den Imaginärteil $Im(z_a) = -1$. Ihr Betrag ist $|z_a| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.

b) Die komplexe Zahl $z_b = 1 - i$ hat einen positiven Realteil und einen negativen Imaginärteil. Sie liegt deshalb im 4-ten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene. Ihr Argument (im Bogenmaß) ist $\frac{7\pi}{4}$. Die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z_b} = 1 + i$ hat das Argument $\frac{\pi}{4}$ und liegt im 1-ten Quadranten.

c) Die komplexe Zahl $z_c = 4e^{\frac{5\pi i}{3}}$ hat den Betrag 4 und das Argument $\frac{5\pi}{3} > \frac{3\pi}{2}$. Sie liegt daher im 4-ten Quadranten, hat einen positiven Realteil und einen negativen Imaginärteil. Für $n = 3$ ist die Potenz z_c^n reell, nämlich $z_c^3 = (4e^{\frac{5\pi i}{3}})^3 = 4^3 \cdot e^{5\pi i} = 64e^{\pi i} = -64$.

d) Die komplexe Zahl $z_{d1} = z_c \cdot z_a$ hat den Betrag $|z_{d1}| = |z_c| \cdot |z_a| = 4 \cdot 2 = 8$. Die Zahl $z_{d2} = \frac{z_c}{z_b}$ hat das Argument $\arg z_{d2} = \arg z_c - \arg z_b \pmod{2\pi} = \frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{4} \pmod{2\pi}$ $= \frac{20\pi}{12} - \frac{21\pi}{12} \pmod{2\pi} = -\frac{\pi}{12} \pmod{2\pi} = \frac{23\pi}{12}$