Aufgabe 1. Mit Ausnahme der 0 können alle Zahlen als Zweier- oder Dreierpotenzen geschrieben werden:

$$x_1 = 8 = 2^3 \ , \quad x_2 = 2^{-3.3} \ , \quad x_3 = 4 = 2^2 \ , \quad x_4 = \left(\sqrt{3}\right)^{-7} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-7} = 3^{-3.5} \ ,$$

$$x_5 = 0.25 = \frac{1}{4} = 2^{-2} \ , \quad x_6 = 0 \ , \quad x_7 = 0.5^{-2.4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2.4} = \left(2^{-1}\right)^{-2.4} = 2^{2.4} \ ,$$

$$x_8 = 1 = 2^0 = 3^0 \ , \quad x_9 = 2^{-7.2} \ , \quad x_{10} = 3^{-3.3} \ , \quad x_{11} = 3^{-3.6} \ ,$$

$$x_{12} = 0.5^{2.4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2.4} = \left(2^{-1}\right)^{2.4} = 2^{-2.4} \ , \quad x_{13} = 4^{-3.8} = \left(2^2\right)^{-3.8} = 2^{-7.6}$$

Durch Sortieren der Exponenten können die Zweier- und Dreierpotenzen getrennt voneinander angeordnet werden:

$$x_6 = 0 \quad < \quad x_{13} = 2^{-7.6} \quad < \quad x_9 = 2^{-7.2} \quad < \quad x_2 = 2^{-3.3} \quad < \quad x_{12} = 2^{-2.4}$$

$$< \quad x_5 = 2^{-2} \quad < \quad x_8 = 2^0 \quad < \quad x_3 = 2^2 \quad < \quad x_7 = 2^{2.4} \quad < \quad x_1 = 2^3$$

$$x_6 = 0 \quad < \quad x_{11} = 3^{-3.6} \quad < \quad x_4 = 3^{-3.5} \quad < \quad x_{10} = 3^{-3.3} \quad < \quad x_8 = 3^0$$

Offenbar ist

$$x_{10} = 3^{-3.3} \quad < \quad 2^{-3.3} = x_2$$

Der schwierigste Teil ist die Überlegung

$$x_9 = 2^{-7.2} \quad = \quad 4^{-3.6} \quad < \quad 3^{-3.6} = x_{11}$$

Die richtige Sortierung ist damit

$$x_6 < x_{13} < x_9 < x_{11} < x_4 < x_{10} < x_2 < x_{12} < x_5 < x_8 < x_3 < x_7 < x_1$$

Aufgabe 2.
a) Die Gleichung muss nach x aufgelöst werden. Bei der Multiplikation mit dem Nenner ist dabei wichtig, dass dieser nicht 0 werden kann:

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot (1+x^2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 y = 1 - y$$

Für die vollständige Auflösung nach x muss durch y dividiert werden. Dies ist erlaubt, weil die Ausgangsgleichung erkennen lässt, dass $y \neq 0$.

$$x^2 = \frac{1-y}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1-y}{y}}$$

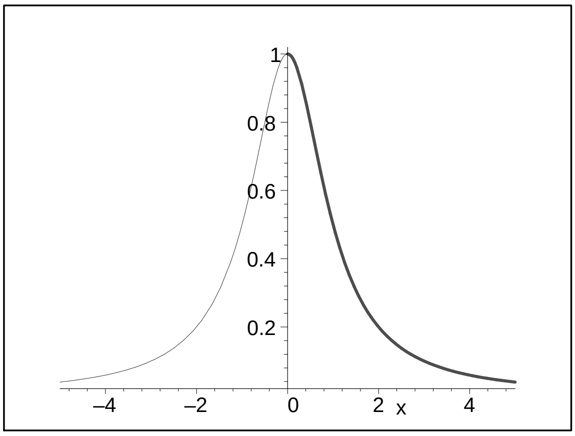
Da die Auflösung nach x nicht eindeutig ist, gibt es keine Umkehrfunktion. Zu einem y-Wert gehören (in der Regel) zwei x-Werte, zu $y = \frac{1}{2}$ etwa $x = -1$ und $x = +1$. Dies ist auch direkt aus der Gleichung von $f(x)$ erkennbar: Die Funktion ist nämlich gerade.

Die Einschränkung $g : f|[0,\infty)$ auf positive x-Werte ist im Bild fett gezeichnet. Sie besitzt die Umkehrfunktion

$$g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

Der Definitionsbereich von g^{-1} ist der Wertebereich von g, also

$$D(g^{-1}) = (0,1]$$



b) Man erkennt $D(f) = \mathbb{R}$ und $W(f) = [-1,1]$. Die Funktion hat offenbar keine Umkehrfunktion. Durch die Einschränkung auf $-\frac{\pi}{2} \le x^2 \le \frac{\pi}{2}$, also $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ergibt sich $x^2 = \arcsin y$. Erneute Einschränkung auf $x \ge 0$, also insgesamt $0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ liefert

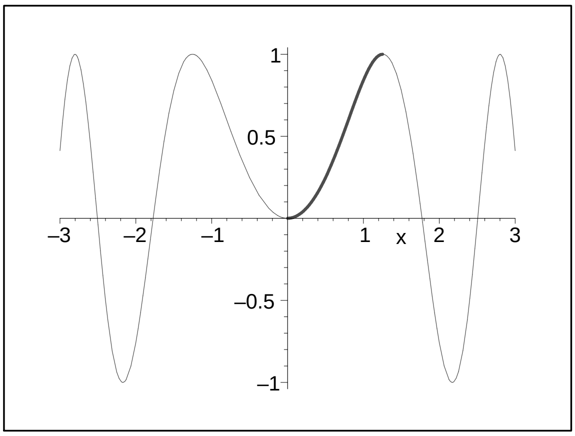
$$x = \sqrt{\arcsin y}$$

Die Funktion $g(x) := \sin x^2$ mit $D(g) = [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ (im Bild fett) hat also die Umkehrfunktion

$$g^{-1}(x) = \sqrt{\arcsin x}$$

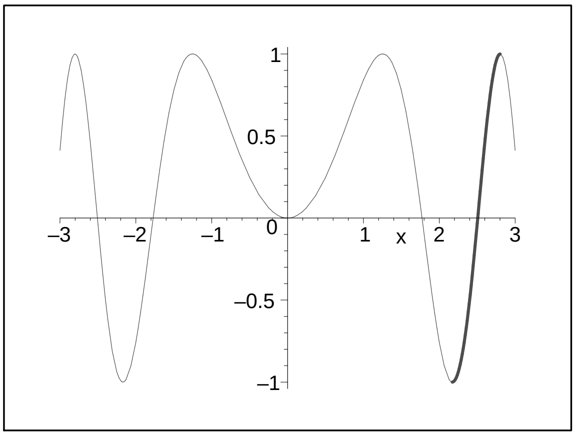
Der Definitionsbereich ist der Wertebereich von g, also

$$D(g^{-1}) = [0,1]$$



Hierbei ist zu beachten, dass diese Umkehrfunktion nicht den ganzen Wertebereich der Ausgangsfunktion abdeckt. Durch die Beschränkung auf $-\frac{\pi}{2} \le x^2 \le \frac{\pi}{2}$ haben wir nämlich einen Teil des Wertebereichs verloren, weil x^2 die negativen Werte von $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nicht erreichen kann.

Für die meisten praktischen Anwendungen ist dies nicht schlimm. Braucht man aber eine Umkehrfunktion für den gesamten Wertebereich von $f(x)$, dann muss die Einschränkung anders vorgenommen werden, beispielsweise auf $[\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{5\pi}{2}}]$ (im Bild fett).



Dann ist

$$y = \sin x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = 2\pi + \arcsin y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{2\pi + \arcsin y}$$

Die Funktion $h(x) := \sin x^2$ mit $D(h) = [\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{5\pi}{2}}]$ hat demnach die Umkehrfunktion

$$h^{-1}(x) = \sqrt{2\pi + \arcsin x}$$

Der Definitionsbereich ist der Wertebereich von h, also

$$D(h^{-1}) = [-1, 1] = W(f)$$

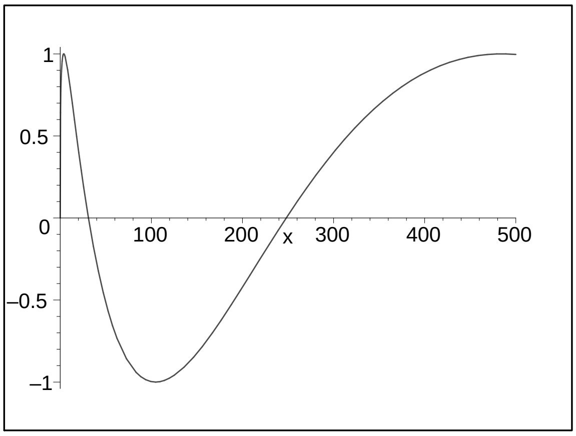
c) Man erkennt direkt $D(f) = [0, \infty)$ und $W(f) = [-1, 1]$.

Die Funktion hat keine Umkehrfunktion. Durch die Einschränkung auf $-\frac{\pi}{2} \leq \sqrt[3]{x} \leq \frac{\pi}{2}$, also

$$0 \leq x \leq \frac{\pi^3}{8}$$

ergibt sich $\sqrt[3]{x} = \arcsin y$ und hieraus schließlich

$$x = \arcsin^3 y$$

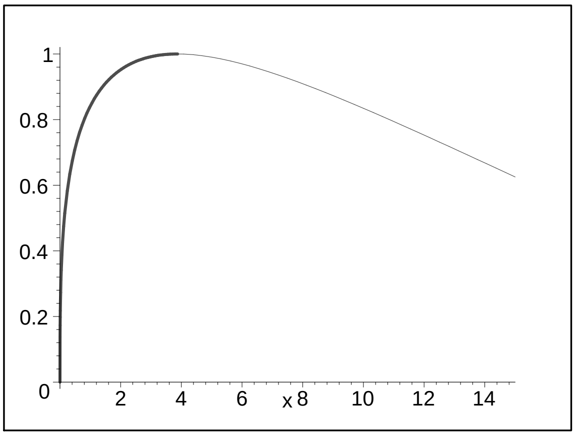


Die Funktion $g(x) := \sin\sqrt[3]{x}$ mit $D(g) = [0, \frac{\pi^3}{8}]$ (im Bild fett) hat also die Umkehrfunktion

$$g^{-1}(x) = \arcsin^3 x$$

Der Definitionsbereich ist der Wertebereich von g, also

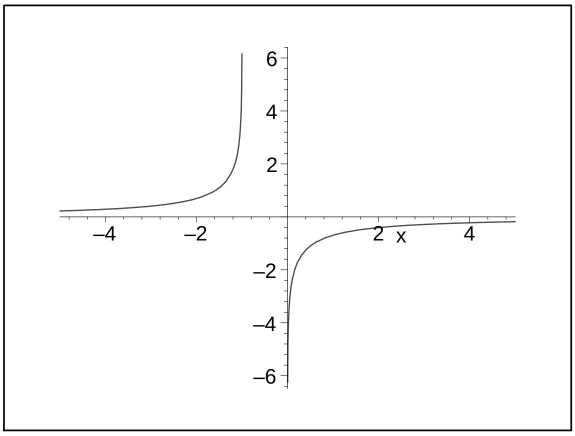
$$D(g^{-1}) = [0, 1]$$



Dieser Definitionsbereich ist nicht der gesamte Wertebereich von $f(x)$. Dies könnte aber wie in der vorigen Teilaufgabe durch andere Einschränkungen erreicht werden.

d) Die Funktion ist definiert, wo $x + 1 \neq 0$ und $\frac{x}{x+1} > 0$.

Die Gleichung $\frac{x}{x+1} = 0$ ist (nur) bei $x = 0$ erfüllt und bei $x = -1$ nicht definiert. Der Bruch $\frac{x}{x+1}$ kann deshalb nur bei -1 und 0 das Vorzeichen wechseln. Bei -2 ist er 2; bei $-\frac{1}{2}$ ist er -1; bei 1 ist er $\frac{1}{2}$. Positiv ist der Bruch also für $x < -1$ und für $x > 0$. Der Definitionsbereich ist folglich $D(f) = \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$.



Für diese x gilt

$$y = \ln\frac{x}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \frac{x}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\cdot e^y = x$$

$$\Leftrightarrow \quad x\cdot e^y + e^y = x \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x - x\cdot e^y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x\cdot(1 - e^y)$$

Zur vollständigen Auflösung nach x muss durch $1 - e^y$ dividiert werden. Aber ist dies erlaubt, ist der Ausdruck also von Null verschieden? Er ist es! Wäre nämlich $1 - e^y = 0$, also $e^y = 1$, dann stünde in der letzten Gleichung links 1 und rechts 0.

$$x = \frac{e^y}{1 - e^y}$$

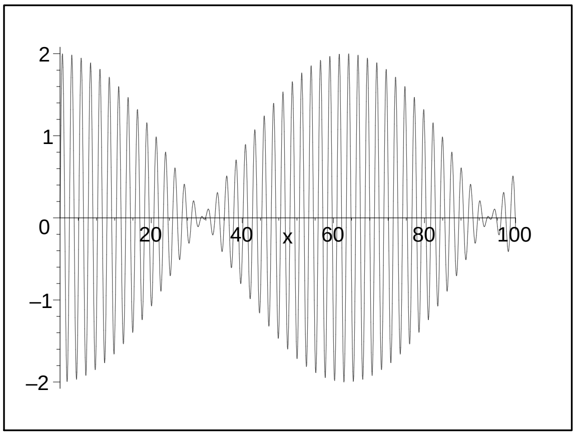
Die Umformungen zeigen, dass $f(x)$ eine Umkehrfunktion besitzt. Es ist

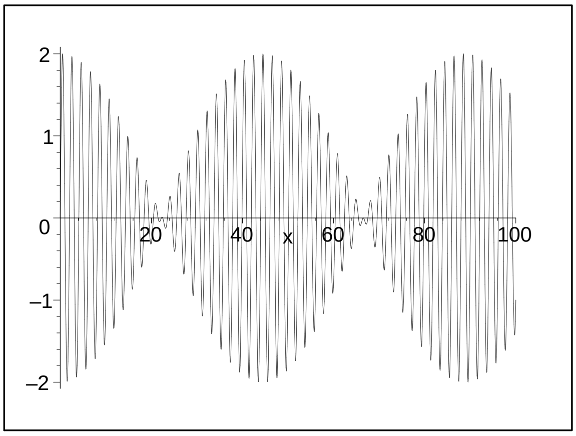
$$f^{-1}(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$$

Der Definitionsbereich ist der Wertebereich von $f(x)$

$$D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Aufgabe 3. Die Bilder in Maple (links f_a, rechts f_b)





sind sehr ähnlich. Sie lassen vermuten, dass beide Funktionen periodisch sind. in Wirklichkeit ist aber nur f_a, nicht jedoch f_b periodisch.

a) f_a ist periodisch, weil die Perioden der beiden Summanden ein gemeinschaftliches ganzzahliges Vielfaches haben.

Die Funktion $f_{a1} := \sin 3x$ hat die Periode $p_{a1} = \frac{2}{3}\pi$, die Funktion $f_{a2} := \sin 3.1x$ die Periode $p_{a2} = \frac{2}{3.1}\pi = \frac{20}{31}\pi$. Als kleinste Zahl, welche eine ganzzahliges Vielfaches sowohl von p_{a1}, als auch p_{a2} ist, findet man $p_a = 20\pi$. Die Funktion f_a ist also periodisch mit Periode $p_a = 20\pi$. Das Schaubild zeigt, dass dies tatsächlich die primitive Periode ist.

b) f_b ist nicht periodisch, weil die Perioden der beiden Summanden kein gemeinschaftliches ganzzahliges Vielfaches haben.

Die Funktion $f_{b1} := \sin 3x$ hat die Periode $p_{b1} = \frac{2}{3}\pi$, die Funktion $f_{b2} := \sin \pi x$ die Periode $p_{b2} = \frac{2}{\pi}\pi = 2$. Ganzzahlige Vielfache von p_{b1} sind irrationial, Vielfache von p_{b2} hingegen rational (sogar ganzzahlig). Ein gemeinsames Vielfaches gibt es daher nicht.

Hinweis: Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man zeigen, dass die Funktion deshalb tatsächlich nicht periodisch ist. Wäre nämlich

$$f_b(x) := \sin 3x + \sin \pi x$$

periodisch mit Periode $p > 0$, dann hätten auch die Ableitungen diese Periode:

$$f_b'(x) = 3\cos 3x + \pi \cos \pi x$$

$$f_b''(x) = -9\sin 3x - \pi^2 \sin \pi x$$

Insbesondere gilt also

$$\sin 3p + \sin \pi p = f_b(p) = f_b(0) = 0$$

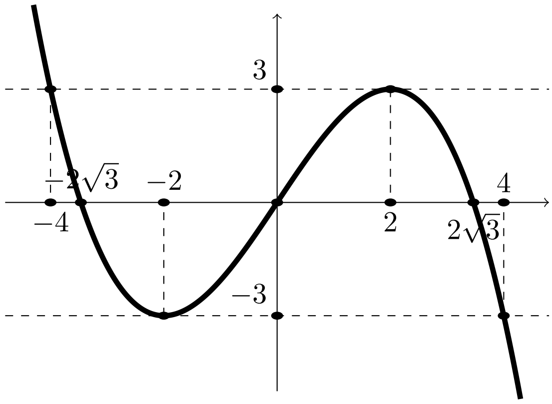
$$-9\sin 3p - \pi^2 \sin \pi p = f_b''(p) = f_b''(0) = 0$$

Dies kann als zwei homogene Gleichungen zur Berechnung von zwei Unbekannten $\sin 3p$ und $\sin \pi p$ interpretiert werden. Die Gleichungen sind linear unabhängig. Die Lösung ist also eindeutig

$$\sin 3p = \sin \pi p = 0$$

Sowohl $3p$, als auch πp müssten also (ganzzahlige) Vielfache von π sein. Dies ist offenbar nicht möglich.

Aufgabe 4.
Die Vorgaben (stetig, ungerade, unbeschränkt, außerhalb des Darstellungsbereiches streng monoton fallend) stellen sicher, dass die Funktion so aussieht, wie man es angesichts der Skizze erwartet. Die Symmetrie erlaubt zudem die Ergänzung des Schaubildes:



a)
$$\begin{aligned} f([-4,4]) &= [-3,3] \\ f((-4,4)) &= [-3,3] \\ f([0,4]) &= [-3,3] \\ f((0,4)) &= (-3,3] \\ f([0,2]) &= [0,3] \\ f((0,2)) &= (0,3) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f^{-1}(\{3\}) &= \{-4,2\} \\ f^{-1}([3,\infty)) &= (-\infty,-4] \cup \{2\} \\ f^{-1}((3,\infty)) &= (-\infty,-4) \\ f^{-1}(\{0\}) &= \{-2\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}\} \\ f^{-1}([0,\infty)) &= (-\infty,-2\sqrt{3}] \cup [0,2\sqrt{3}] \\ f^{-1}((0,\infty)) &= (-\infty,-2\sqrt{3}) \cup (0,2\sqrt{3}) \\ f^{-1}(\{-3\}) &= \{-2,4\} \\ f^{-1}([-3,\infty)) &= (-\infty,4] \\ f^{-1}((-3,\infty)) &= (-\infty,-2) \cup (-2,4) \end{aligned}$$

Hinweis: Das Schaubild zeigt die Funktion

$$f(x) = \frac{9}{4}x - \frac{3}{16}x^3 = \frac{3}{16}(12x - x^3) = \frac{3}{16}x(12 - x^2)$$

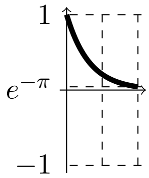
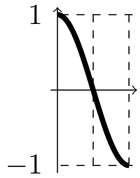
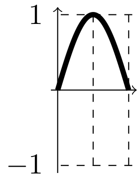
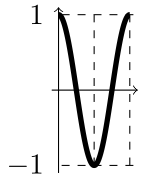
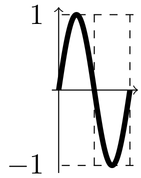
Damit können die eingezeichneten Werte leicht nachgerechnet werden. Die Nullstellen sind offenbar $x_{n1} = 0$, $x_{n2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $x_{n3} = -2\sqrt{3}$. Die stationären Stellen ergeben sich aus

$$f'(x) = \frac{3}{16}(12 - 3x^2) = \frac{9}{16}(4 - x^2) \stackrel{!}{=} 0$$

zu $x_{s1} = 2$ und $x_{s1} = -2$. Die zugehörigen Funktionswerte sind $f(2) = 3$ und $f(-2) = -3$. 2 ist offenbar doppelte Nullstelle von $f(x) - 3$. Mit Horner oder Polynomdivision oder dem Satz von Vieta erhält man als dritte Nullstelle -4. Aufgrund der Symmetrie ist $f(x) = -3$ genau für -2 (doppelte Nullstelle von $f(x) + 3$) und 4.

Aufgabe 5.

a) Notwendig ist lediglich die Kenntnis der 5 Funktionen:

Funktion	e^{-x}	$\cos x$	$\sin x$	$\cos 2x$	$\sin 2x$
Graph					
W(f)	$[e^{-\pi}, 1]$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
surjektiv?	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
injektiv?	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$

b) Vorbereitend wird das Urbild von $[-1, 0]$ und das Bild von $[0, \frac{\pi}{2}]$ bestimmt:

Funktion	e^{-x}	$\cos x$	$\sin x$	$\cos 2x$	$\sin 2x$
$f^{-1}([-1, 0])$	$\emptyset$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$\{0, \pi\}$	$[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi] \cup \{0\}$
$f(f^{-1}([-1, 0]))$	$\emptyset$	$[-1, 0]$	$\{0\}$	$[-1, 0]$	$[-1, 0]$
$f([0, \frac{\pi}{2}])$	$[e^{-\frac{\pi}{2}}, 1]$	$[0, 1]$	$[0, 1]$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
$f^{-1}(f([0, \frac{\pi}{2}]))$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \pi]$	$[0, \pi]$	$[0, \frac{\pi}{2}] \cup \{\pi\}$

c) Nochmals die wesentlichen Ergebnisse:

Funktion	e^{-x}	$\cos x$	$\sin x$	$\cos 2x$	$\sin 2x$
surjektiv?	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(f^{-1}([-1, 0]))$	$\emptyset$	$[-1, 0]$	$\{0\}$	$[-1, 0]$	$[-1, 0]$
injektiv?	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f^{-1}(f([0, \frac{\pi}{2}]))$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \pi]$	$[0, \pi]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$

Die Beispiele lassen vermuten, dass immer $f(f^{-1}(B)) \subset B$ gilt und für surjektive Abbildungen sogar $f(f^{-1}(B)) = B$. Entsprechend sieht es so aus, als gelte stets $f^{-1}(f(A)) \supset A$ und für injektive Abbildungen sogar $f^{-1}(f(A)) = A$.

Hinweis: Für $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ besteht $f(f^{-1}(B))$ aus denjenigen Werten in

B, welche als Funktionswerte tatsächlich vorkommen. $f^{-1}(f(A))$ gibt die größtmögliche Menge an, die mit den gleichen Funktionswerten auskommt wie A.

d) Es sei $f : X \to Y$.

Regel 1: Es ist $f(f^{-1}(B)) \subset B$ für alle $B \subset Y$ und $f^{-1}(f(A)) \supset A$ für alle $A \subset X$.

Beweis.

- Es sei $B \subset Y$ und $y \in f(f^{-1}(B))$, das heißt $y = f(x)$ mit geeignetem $x \in f^{-1}(B)$. Letzteres bedeutet aber, dass $f(x) \in B$. Wegen $y = f(x)$ ist demnach $y \in B$.
- Es sei $A \subset X$ und $x \in A$. Dann ist $y := f(x) \in f(A)$, also $x \in f^{-1}(f(A))$.

□

Regel 2: Bei surjektiven Funktionen gilt $f(f^{-1}(B)) = B$ für alle $B \subset Y$, bei injektiven Funktionen $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle $A \subset X$.

Beweis.

- Es sei f surjektiv und $B \subset Y$. Wegen Regel 1 bleibt nur noch $f(f^{-1}(B)) \supset B$ zu zeigen. Es sei also $y \in B$. Weil f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $y = f(x)$. Dieses x liegt (wegen $f(x) = y \in B$) in $f^{-1}(B)$. Folglich ist $y \in f(f^{-1}(B))$.
- Es sei f injektiv und $A \subset X$. Wegen Regel 1 bleibt nur noch $f^{-1}(f(A)) \subset A$ zu zeigen. Es sei $x \in f^{-1}(f(A))$, also $f(x) \in f(A)$. Es gibt demnach ein $\tilde{x} \in A$ mit $f(x) = f(\tilde{x})$. Da f injektiv ist, muss $x = \tilde{x} \in A$ gelten.

□

Regel 3: Gilt $f(f^{-1}(B)) = B$ für alle $B \subset Y$, so ist f surjektiv. Ist $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle $A \subset X$, so ist f injektiv.

Beweis. Der Beweis geschieht am besten indirekt.

- f sei nicht surjektiv. Dann gibt es ein $y \in Y$, das nicht als Funktionswert vorkommt. (Kurz könnte dies als $y \in Y \setminus f(X)$ geschrieben werden.) Es ist $f(f^{-1}(\{y\})) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{y\}$.
- f sei nicht injektiv. Dann gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$, aber $f(x_1) = f(x_2)$. Folglich ist $x_2 \in f^{-1}(f(\{x_1\}))$, also $f^{-1}(f(\{x_1\})) \neq \{x_1\}$.

□

Regel 4: Genau dann gilt $f(f^{-1}(B)) = B$ für alle $B \subset Y$, falls f surjektiv ist. Genau dann ist $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle $A \subset X$, falls f injektiv ist.

Beweis. Das ist eine einfache Folgerung. Regel 4 fasst einfach die Regeln 2 und 3 zu einer einzigen Regel zusammen. □

Aufgabe 6. Wir nehmen an, es wäre $10^x = 7$ mit $x \in \mathbb{Q}$. Dann ist $x = \frac{p}{q}$ mit geeigneten Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Offenbar ist $x > 0$, also $p \in \mathbb{N}$.

$$10^{\frac{p}{q}} = 7 \qquad \Leftrightarrow \qquad 10^p = 7^q$$

Links steht aber eine gerade Zahl, rechts eine ungerade. Die Annahme ist also falsch.