Thema: Richtungsfelder

Aufgabe 1. Gegeben ist die Differentialgleichung

a) $y' = \dfrac{y}{x} + 2\sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}}$

b) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}}$

Zeichnen Sie für $x < 0$ das zugehörige Richtungsfeld. Bestimmen Sie damit (zwischen $x = -4$ und $x = 0$) zeichnerisch eine Lösung, die der Anfangsbedingung $y(-4) = 0$ genügt.

Aufgabe 2. Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = 1 + x - y$.

a) Auf welcher Kurve liegen Extrema und Wendepunkte der Lösungen?

b) Zeichnen Sie das zugehörige Richtungsfeld sowie die beiden im vorigen Aufgabenteil ermittelten Kurven.

c) Skizzieren Sie diejenige Lösung, die der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ genügt.

d) Bestimmen Sie die Lösung mit $y(0) = 1$ rechnerisch.

Zusätzliche Prüfungsaufgaben

Aufgabe 3. WS 05/06 (55 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch Partialbruchzerlegung das unbestimmte Integral der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

b) Berechnen Sie die beiden Integrale $\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx$ und $\int\limits_{2}^{\infty} f(x)dx$.

c) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen der Differentialgleichung

$$y' \quad = \quad \frac{y^2 + 2y - 3}{x^2 + 2x - 3}$$

d) Ermitteln Sie für $-1 < x < 1$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' \quad = \quad \frac{y^2 + 2y - 3}{x^2 + 2x - 3} \quad , \qquad y(0) = 3$$

Hinweis: Für die gesuchte Lösung ist (überall) $y > 1$. (Dies braucht nicht gezeigt zu werden.) Mit dieser Kenntnis gelingt die Auflösung der bei der Integration entstehenden Beträge.

Aufgabe 4. WS 14/15 (34 Punkte). Gegeben sei die von $n \in \mathbb{N}_0$ abhängige Differentialgleichung für $y(x)$

$$(1 + n^2x^2) \cdot y' \;=\; y^n$$

a) Für welche beiden Werte von n ist die Differentialgleichung linear? Prüfen Sie jeweils, ob die Gleichung homogen oder inhomogen ist. Wie lautet die allgemeine Lösung $y_{allg}(x)$ in den beiden Fällen.

b) Für welche Werte von n ist die Gleichung autonom? Für welche Werte von n ist sie separabel? Geben Sie in Abhängigkeit von n die allgemeine Lösung $y_{allg}(x)$ der Differentialgleichung in impliziter Form an. (Eine Auflösung nach y ist also nicht verlangt.)

c) Zeigen Sie, dass für gerades n alle Lösungen der Differentialgleichung monoton wachsend sind. Geben Sie für $n = 1$ alle streng monoton fallenden Lösungen an.

d) Berechnen Sie (in expliziter Form und inklusive Definitionsbereich) die Lösung $y_1(x)$ des Anfangswertproblems

$$(1 + 16x^2) \cdot y' \;=\; y^4 \quad , \quad y(0) = -\sqrt[3]{\frac{16}{3\pi}}$$

e) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$ die Lösung $y_2(x)$ des Anfangswertproblems

$$(1 + n^2x^2) \cdot y' \;=\; y^n \quad , \quad y(87) = 0$$